

А. Лихтенберг

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Перевод с английского



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1972

PHASE-SPACE DYNAMICS OF PARTICLES

ALLAN J. LICHTENBERG

JOHN WILEY AND SONS, INC.
NEW YORK · LONDON · SYDNEY · TORONTO

Говоря о книге А. Лихтенберга, нельзя исходить из традиционного замечания о заполнении определенного пробела в имеющейся литературе, настолько существенно отличается она от всех монографий по ускорителям и физике плазмы. Прежде всего, автор не ставил своей задачей систематическое изложение какого-нибудь раздела прикладной теории или исследование новых эффектов. Книга не может рассматриваться и как руководство по теоретической механике. В то же время монография по-настоящему интересна и полезна, особенно в тех случаях, когда на первый план выдвигается необходимость наглядной и простой интерпретации сложных явлений, описываемых довольно громоздкими уравнениями.

Пожалуй, Лихтенбергу удалось решить самую трудную задачу — сделать книгу интересной для максимально широкого круга читателей. С одной стороны, физическая простота основной концепции, наглядность изложения и отсутствие сложного математического аппарата позволяют рекомендовать ее студентам-физикам, тем более что в отечественной учебной литературе уделяется очень мало внимания столь важным в прикладном отношении разделам механики, как теорема Лиувилля, адиабатические инварианты, канонические преобразования и т. д. С другой стороны, усвоив основную концепцию книги, даже опытный инженер и физик-экспериментатор получат в свое распоряжение дополнительный мощный инструмент для быстрых качественных оценок в ситуациях, требующих, казалось бы, долгих и утомительных выкладок. Наконец, читатель, интересующийся современной теорией ускорителей и магнитных ловушек, найдет в книге немало методически ценных разделов и ряд глубоких физических аналогий между различными разделами теории.

Концепцию фазового пространства для описания движения частиц в заданных полях никак нельзя назвать новой. Тем не менее в теории ускорителей она стала широко использоваться лишь в последние 10—15 лет, когда существенное значение стало придаваться повышению интенсивности, накоплению частиц и т. д. Другими словами, переход от исследования движения одной частицы к ансамблю частиц потребовал и нового, более адекватного описания.

Конечно, для системы невзаимодействующих частиц простое изменение описания не дает возможности исследовать качественно новые эффекты. Однако даже здесь применение общих теорем механики типа теоремы Лиувилля иногда приводит к неожиданным результатам. В качестве примера можно упомянуть механизм ускорения «фазовым смещением». Он долгое время оставался незамеченным, хотя в принципе полностью описывается обычной теорией автофазировки, насчитывающей уже 25 лет, но приспособленной для описания долговременного резонансного воздействия волны на частицу. В терминах же теоремы Лиувилля этот механизм настолько очевиден, что требует для своего объяснения полстраницы текста.

В последнее время в теории ускорителей на первое место выдвинулись проблемы, связанные с пространственным зарядом, что сближает ее с теорией плазмы. Здесь кинетическое описание системы частиц и, следовательно, широкое использование концепции фазового пространства совершенно необходимы. К сожалению, автор касается этих вопросов лишь вскользь, но материал книги дает хорошую основу для их дальнейшего изучения.

Подбор материала и построение книги достаточно ясны из предисловия автора. Правда, его неоднократное упоминание о физике плазмы следует принимать с оговорками. По существу, все приложения, рассмотренные в книге, относятся к движению частицы в заданных полях специальной конфигурации — главным образом в ускорителях и частично в ловушках. Во всяком случае, физику плазмы (да и теорию ускорителей) принято рассматривать гораздо шире.

Специальной оговорки требует и принятая в книге система ссылок. Вряд ли можно согласиться с автором, утверждающим, что основная литература по данным вопросам сосредоточена в неопубликованных отчетах и труднодоступных трудах конференций. Верно, что такая литература довольно многочисленна, но большей частью она посвящена частным вопросам или же конкретизации общей теории, так сказать, переводу ее на «свой язык». За немногими исключениями все результаты общего характера можно найти в учебниках и монографиях, в том числе изданных у нас в стране. Что касается истории конкретных вопросов теории ускорителей и отчасти магнитных ловушек, то автор ее просто игнорирует, предпочитая ссылаться на хорошо знакомые ему работы, даже если они появились значительно позже оригинальных. К сожалению, стиль изложения в книге таков, что отмеченный недостаток практически не поддается исправлению.

Можно было бы отметить и некоторые другие слабые стороны книги, однако основные ее достоинства — ясность и наглядность материала, изложение казалась бы разнородных вопросов в рамках единой концепции — делают ее полезной самому широкому кругу читателей — от студентов до специалистов, давно работающих в данной области, но желающих увидеть ее с новой, иногда неожиданной точки зрения.

Использование понятия фазового пространства при решении задач динамики частиц имеет свою историю, которая начинается с исследований Гамильтона и Лиувилля в середине прошлого столетия. Позднее эти понятия развил Пуанкаре при решении проблем небесной механики. Пуанкаре, а позднее математики первоначально использовали эти методы при решении проблемы трех тел. Хотя методически проблема трех тел относится к кругу вопросов, рассматриваемых в этой монографии, но в связи с тем, что этой теме посвящено достаточно много работ, мы будем касаться ее либо для иллюстрации развиваемой теории, либо для подтверждения значительного вклада в эту область. Методы фазового пространства начали усиленно развиваться после появления квантовой теории в начале этого века. На Сольвейской конференции в 1911 г. Эйнштейн отметил роль интеграла действия. Он отметил, что его адиабатическое постоянство, которое было показано Грином и Лиувиллем приблизительно на 75 лет раньше, может быть непосредственно связано с физическим понятием о постоянстве числа квантов в медленно изменяющейся системе. Квантование углового момента, постулированное Бором в 1913 г., вскоре было признано частным случаем квантования интеграла действия. Интегралу действия, который, как оказалось, играет важную роль в теории Гамильтона — Якоби, таким образом, был придан как физический, так и математический смысл. Позднее понятия фазового пространства нашли широкое применение в квантовой теории. Мы же обсудим эти вопросы в классической трактовке.

Недавно методы фазового пространства снова привлекли к себе внимание в связи с изучением движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. В середине 50-х годов методы фазового пространства стали применяться в теории ускорителей и в физике плазмы. Как это часто случается, некоторые сделанные ранее работы снова привлекли к себе внимание и были углублены, а многие старые результаты были заново «открыты». Это произошло из-за недостаточности информации, которая частично была обусловлена тенденцией публиковать результаты в виде препринтов с ограниченным тиражом.

В этой монографии рассматриваются понятия фазового пространства в приложении к пучкам, ускорителям и к проблеме удержания частиц, а также устанавливается их связь с теорией и полученными ранее результатами. Хотя сохраняется специфика методики исследования каждого предмета, однако делается попытка показать и единство различных подходов. Этот же принцип используется и в сложной проблеме обозначений.

В книге пять глав. В гл. 1 излагаются основные понятия и основы теории, которая используется при решении конкретных проблем или дает возможность по-новому взглянуть на рассматриваемую проблему. В гл. 2 рассматривается адиабатическая инвариантность. Гл. 3 посвящена двум темам. Первая тема касается преобразований фазового пространства с учетом коллективных эффектов. Вторая тема, тесно связанная с первой, рассматривает системы транспортировки пучков, при изучении которых широко используются методы фазового пространства. В гл. 4 и 5 рассматриваются соответственно приложения методов фазового пространства к теории ускорителей и захвату, удержанию и нагреву заряженных частиц. Автор попытался подробно рассмотреть все эти три темы, однако вопросы, подробно изложенные в других работах или требующие громоздкого изложения, рассмотрены поверхностно или вообще опущены. Например, матричные расчеты широко используемых систем транспортировки пучков и ускоряющих систем значительно упрощены, а точные вычисления адиабатических инвариантов более высокого порядка даны только для одного специфического случая. Полностью опущены приложения к синхротронам с жесткой фокусировкой, однако связанный с этим вопрос о накоплении пучков в ускорителях, являющийся важным примером использования методов фазового пространства, рассмотрен. Специалисты могут не согласиться с тем, что некоторым вопросам уделено особое внимание. Это можно в значительной степени оправдать интересом автора именно к этим вопросам. Автор старался, чтобы каждая глава была законченной в отношении содержания, что позволит их читать независимо друг от друга. В силу этого обстоятельства некоторые важные формулы и понятия повторяются.

Книга предназначена для студентов старших курсов и научных работников. Предполагается, что читателю известны основные операции с векторами, а также основы теории дифференциальных уравнений и матричной алгебры. В книге изложены необходимые понятия гамильтоновой механики, однако некоторое предварительное знакомство с предметом облегчит понимание содержания книги. Математические выкладки приводятся в тех случаях, когда они способствуют пониманию предмета, при этом автор не стремится к математической строгости. Вообще говоря, используется больше уравнений, чем необходимо для выяснения какого-либо результата. Это вызвано тем, что немного больше алгебры позволит читателю не тратить время на «изобретение велосипеда».

И, наконец, необходимо правильно оценить место, занимаемое предметом в историческом плане, отдать должное основополагающим работам и представить полный список цитируемой литературы. Это особенно трудно сделать при изложении теории ускорителей, где использовано много результатов из неопубликованных отчетов, недоступных большинству специалистов. В данной книге по возможности даны ссылки на опубликованные источники. Вообще же не было постоянного стремления к оригинальным источникам, особенно в области астрономии, где литература автору большей частью незнакома. Однако автор пытался сослаться на основополагающие источники и наиболее важные дополнительные работы.

§ 1.1. Введение

Движение частиц в фазовом пространстве. Рассмотрим уравнения движения n частиц, имеющих в общем случае $3n$ степеней свободы. В гамильтоновом или каноническом представлении движение частиц описывается $6n$ уравнениями, которые могут быть записаны в виде (Голдстейн, 1951 г.)

$$\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i; \quad \dot{q}_i = \partial H/\partial p_i, \quad (1.1)$$

где $H = H(p_1, \dots, p_{3n}, q_1, \dots, q_{3n}, t)$; точка над символом означает полную производную по времени.

Пусть частицы движутся в потенциальном поле, которое не зависит от времени, причем внешние связи отсутствуют. Если обозначить q_i — координаты положения частиц в прямоугольной системе координат, а p_i — соответствующие импульсы частиц, то H — полная энергия частиц (кинетическая плюс потенциальная), являющаяся интегралом движения, т. е. не зависящая явно от времени. В теоретической механике дается более подробное толкование величин q_i , p_i и H . Краткое изложение теории дано в § 1.2. В дальнейшем нам пригодится именно эта простая интерпретация уравнений. Будем ссылаться на (1.1) как на систему уравнений, описывающих движение частиц, или более кратко как на «систему». $6n$ начальных координат и импульсов всех частиц однозначно определяют последующее движение. Движение системы частиц можно также описать движением одной точки, но уже в пространстве $6n$ измерений. Эта точка отображает конкретную конфигурацию n частиц в пространстве $6n$ измерений. Чтобы нагляднее представить себе это движение, рассмотрим более простую систему, в которой каждая пара уравнений вида (1.1) не зависит от всех остальных пар. Это эквивалентно предположению, что отсутствует взаимодействие между частицами и что движение вдоль каждого из трех измерений в пространстве не зависит от двух других. В силу этого движение каждой частицы вдоль пространственной оси обладает двумя константами движения — *начальными положением и компонентой импульса* вдоль этого направления, т. е. движение частицы можно представить уравнениями

$$P(p, q, t) = p_1; \quad Q(p, q, t) = q_1, \quad (1.2)$$

которые в принципе могут быть решены относительно p и q как функций времени и начальных значений p_1 и q_1 . Предположим, что уравнения (1.2) решены относительно p и q как функций времени. В пространстве двух измерений с координатными осями p и q можно проследить траектории движения в одном пространственном измерении n частиц от начального момента t_1 , отвечающего начальным p_i и q_i , для каждой i -й частицы, до некоторого более позднего момента t_2 . Назовем это p — q -пространство *фазовым пространством* частиц (траектории трех изображающих точек показаны на рис. 1.1). Отметим два важных свойства фазового пространства.

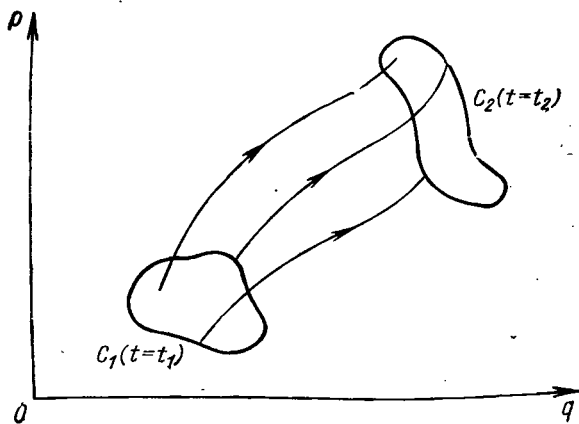


Рис 1.1. Траектории изображающих точек в фазовом пространстве.

1. Траектории частиц в фазовом пространстве не пересекаются в некоторый заданный момент времени. Это следует из того факта, что начальные условия и время однозначно определяют последующее движение. Таким образом, если бы две траектории пересекались, то они имели бы одинаковые значения p и q в какой-то момент времени и их дальнейшее движение было бы тождественным. В следующем пункте мы увидим, что если гамильтониан не зависит от времени, то (1.2) не будет явно зависеть от времени. В этом частном случае траектория в фазовом пространстве не зависит от времени и траектории не могут пересекаться в двумерном фазовом пространстве. Очевидно, что обобщенное фазовое пространство, у которого в качестве третьего измерения выбрана ось времени, даже если гамильтониан зависит от времени, не содержит пересекающихся траекторий.

2. Граница в фазовом пространстве C_1 , ограничивающая некоторую группу частиц в момент времени t_1 , преобразуется к моменту времени t_2 в границу C_2 , которая ограничивает ту же самую группу частиц. Второе свойство следует непосредственно из первого, так как любая частица внутри границы при приближении к послед-

ней должна затем принять те же начальные условия для последующего движения, что и граничная частица, и, таким образом, двигаться так же, как и граничная частица. Из этого второго свойства вытекают важные следствия, которые заключаются в том, что вместо рассмотрения большой группы частиц можно следить за движением значительно меньшей группы граничных частиц.

Проиллюстрируем кратко второе свойство на простом примере, который более подробно будет разобран в гл. 3. Рассмотрим группу

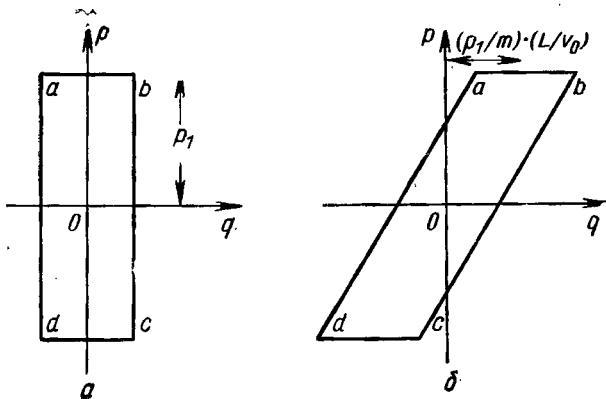


Рис. 1.2. Линейное преобразование области фазового пространства, ограниченной прямоугольником.

невзаимодействующих частиц, имеющих общее дрейфовое движение. Дадим матрицу, описывающую поперечное общему направлению дрейфа движение частиц в двумерном фазовом пространстве:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{v_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

В свободной от действия сил дрейфовой области поперечный импульс сохраняется, в то время как поперечная координата изменяется в конце дрейфа на величину, равную произведению поперечной скорости p_1/m на время дрейфа L/v_0 , где L — длина дрейфа, v_0 — дрейфовая скорость. Если частицы первоначально находятся в области поперечного фазового пространства, ограниченного прямоугольником $abcd$ (рис. 1.2), то после дрейфа q координаты каждой частицы изменятся пропорционально начальному импульсу p , преобразовав прямоугольник в параллелограмм. На этом примере, находя преобразование границы, убеждаемся, что координаты всех частиц не только локализованы в фазовом пространстве, но, используя свойства линейной матрицы, которая преобразует прямые линии в прямые, находим это конкретное преобразование границы.

Такие простые графические построения значительно облегчают понимание многих вопросов динамики частиц.

Хотя в предыдущем рассуждении рассматривалось фазовое пространство, занятое группой частиц, как область, внутри которой могут быть найдены предполагаемые известными координаты частиц, существует другая интерпретация фазового пространства. Если начальные координаты одной частицы неизвестны, мы можем рассмотреть совокупность возможных начальных координат частицы, причем начальные координаты распределены в пространстве так, что их вероятность, определяемая из этого распределения, лучше всего соответствует имеющейся информации о действительных координатах частицы. Плотность вероятности обычно нормируется так, что интеграл от нее по всему пространству равен единице. Это соответствует тому факту, что действительные начальные координаты частицы находятся где-то в пространстве. Если у нас имеются n невзаимодействующих частиц, то плотность частиц в фазовом пространстве равна плотности распределения вероятности частиц без нормировки. Траектории в фазовом пространстве дают изменение плотности распределения. Если частицы взаимодействуют, то уравнения (1.1) связаны и размерность фазового пространства больше. Мы вернемся к этому более сложному случаю в § 1.3.

В предыдущих рассуждениях мы не использовали тот факт, что уравнения движения представлены в канонической форме. При использовании данной выше геометрической интерпретации мы могли бы в качестве координаты, отвечающей одной степени свободы, с равным правом выбрать скорость вместо импульса. В следующем разделе введения покажем, почему мы выбрали именно гамильтонову форму уравнений движения.

Гамильтонова форма уравнений движения. Рассмотрим движение частицы, имеющей одну степень свободы. В самой общей форме уравнения движения могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{p} = -F(p, q, t); \quad \dot{q} = G(p, q, t). \quad (1.3a)$$

Для большого класса физических систем сила p на зависит от импульса p , а скорость q не зависит от координаты q . Если мы интересуемся колебательным движением около некоторого положения равновесия, возможно дальнейшее упрощение. Если отклонения от положения равновесия достаточно малы, функция G может быть разложена в ряд Тейлора около некоторого равновесного значения импульса p_0 . После этих упрощений (1.3a) принимает вид

$$\dot{p} = -F(q, t); \quad \dot{q} = G(t) p, \quad (1.3b)$$

где опущен аргумент p_0 в G . Сравнивая (1.3b) с (1.1), видим, что уравнения (1.3b) можно получить из гамильтониана, если F и G определить из соотношений

$$-F(q, t) = -\partial H / \partial q; \quad G(t) p = \partial H / \partial p.$$

Интегрируя эти выражения по q и p , соответственно получаем:

$$H = \int F(q, t) dq + g(p, t); \quad (1.4a)$$

$$H = \frac{G(t) p^2}{2} + f(q, t), \quad (1.4b)$$

где $f(q, t)$ и $g(p, t)$ — постоянные интегрирования. Так как H — одна и та же функция в (1.4a) и (1.4b), то из этих двух уравнений находим постоянные интегрирования, в результате чего имеем

$$H = \frac{G(t) p^2}{2} + \int F(q, t) dq. \quad (1.5)$$

В этом общем случае H не является константой движения, и траектория частицы в фазовом пространстве, т. е. ее путь в p — q -пространстве, не может быть точно определена независимо от времени. С другой стороны, если F и G неявные функции времени, получаем, что гамильтониан не зависит от времени, а зависит только от начальных координат p_0 и q_0 :

$$\frac{G p^2}{2} + \int F(q) dq = H(p_0, q_0). \quad (1.6)$$

Поэтому для заданного значения q импульс p , определенный из уравнения (1.6), не зависит от времени. Если $F > 0$ для $q > 0$ и $F < 0$ для $q < 0$, имеется осциллирующая система, для которой кривые постоянного гамильтониана замкнуты. Если начальные условия заданы, можно определить максимальные отклонения координаты и импульса частицы от положения равновесия. Для систем с одной степенью свободы, у которых гамильтониан постоянен, можно получить формальное решение уравнений движения. Из второго уравнения системы (1.1)

$$dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p}, \quad (1.7)$$

отсюда, интегрируя, получаем

$$t = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\partial H / \partial p}. \quad (1.8)$$

Так как $\partial H / \partial p$ — функция только p и q , а p и q связаны через (1.6), сводим уравнение движения к квадратурам. Часто квадратуры могут быть определены только численно. В таких случаях ценность полученных выше аналитических выражений уменьшается. Однако информация, полученная из первого интеграла уравнения движения (1.6), достаточна для многих приложений. В следующем разделе эта ситуация обсуждается более подробно.

Кратко рассмотрим системы с более чем одной степенью свободы. Уравнение (1.7) тогда обобщается:

$$dt = \frac{dq_1}{\partial H / \partial p_1} = \frac{dq_2}{\partial H / \partial p_2} = \dots = \frac{dq_n}{\partial H / \partial p_n}. \quad (1.9)$$

Если $\partial H/\partial p_1 = f(q_1)$ — функция только q_1 , первое уравнение сводится к квадратурам (т. е. решено) и сходно с предшествующими уравнениями. В общем случае, чтобы получить полное решение, нужно одновременно решить всю систему дифференциальных уравнений. Если в дополнение к гамильтониану существуют другие интегралы движения, тогда число уравнений системы может быть уменьшено.

Проиллюстрируем эту процедуру на простом примере частицы, движущейся в поле центральных сил. Не ограничивая общности, будем рассматривать плоское движение. В полярной ($r - \theta$) системе координат гамильтониан, равный $T + V$ для консервативных систем с голономными связями, имеет вид

$$H = (1/2m)(p_r^2 + p_\theta^2/r^2) + U(r), \quad (1.10)$$

где $p_r = mr\dot{r}$; $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$; m — масса частицы; U — потенциал, соответствующий центральной силе ($F = -\partial U/\partial r$). Так как система консервативная, то $H = H_0$ — константа. Уравнения движения, записанные в форме (1.9), принимают вид

$$dt = \frac{\partial d\theta}{\partial H/\partial p_\theta} = \frac{dr}{\partial H/\partial p_r}.$$

Проводя дифференцирование по p_θ и p_r и исключая p_r с помощью гамильтониана (1.10), получаем

$$dt = \frac{d\theta}{\frac{p_\theta}{mr^2}} = \frac{dr}{\frac{1}{m} \left[2m(H_0 - U(r)) - \frac{p_\theta^2}{r^2} \right]}. \quad (1.11)$$

До тех пор, пока не известна явная зависимость p_θ от θ и r , эти уравнения не могут быть решены. Именно здесь оказывается полезным существование еще одного интеграла движения. В нашем случае p_θ — интеграл движения. Это происходит из-за того, что нет силы по θ -направлению, и поэтому θ явно не входит в гамильтониан; следовательно, в (1.1) $dp_\theta/dt = 0$, откуда следует:

$$p_\theta = \text{const.} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) во второе уравнение (1.11), сводим радиальное и угловое движения к квадратурам.

Законы сохранения в фазовом пространстве. Гамильтонов формализм позволяет получить значительную информацию о движении группы частиц и в том случае, когда неизвестен путь как функция независимой переменной. В частности, если известна начальная энергия системы с одной степенью свободы и гамильтонианом, не зависящим от времени, то из (1.6) видно, что можно определить импульс как функцию координаты, причем он оказывается не зависящим от времени. Начальные значения p и q определяют начальную энергию, которая как раз и является гамильтонианом $H(p_0, q_0)$ в (1.6).

Поясним сказанное на простом примере нелинейной пружины. Уравнения движения даны в форме (1.36) и имеют следующий вид:

$$\ddot{p} = -(\alpha q + \beta q^3); \quad \dot{q} = p/m,$$

где $G(t)$ из (1.36) — константа, обратно пропорциональная массе, а сила не зависит от времени. Выполняя интегрирование, как и в (1.4), получаем не зависящий от времени гамильтониан:

$$\frac{p^2}{2m} + \left[\frac{\alpha q^2}{2} + \frac{\beta q^4}{4} \right] = H(p_0, q_0).$$

Коэффициент α выбран положительным с тем, чтобы при небольших q сила была возвращающей*. В случае $\beta < 0$ возвращающая

сила уменьшается с ростом амплитуды, что ведет к тому, что для больших амплитуд система перестает быть устойчивой. Рассмотрим случай $\beta < 0$; изобразим графически зависимость потенциальной энергии от положения частицы и соответствующие точки на фазовой плоскости для нескольких начальных значений гамильтониана (рис. 1.3, а, б). Начальные значения гамильтониана соответствуют полной энергии системы (кинетической и потенциальной). Если значение гамильтониана H больше максимального значения потенциальной энергии U , то импульс P всегда отличен от нуля; это ведет к тому, что для гамильтониана H_U (см. рис. 1.3) движение слева направо будет неограниченным. Для начальных амплитуд, расположенных внутри потенциальной ямы, значения начальной полной энергии H_S и H_L отвечают соответственно устойчивому движению и границе устойчивого движения. Предельная траектория, на которой период колебаний становится бесконечным, называется *сепаратрисой*.

Рис. 1.3. Соответствие между диаграммой энергии (а) и диаграммой в фазовом пространстве (б) для нелинейного осциллятора.

Если гамильтониан — функция времени, то, как мы уже отмечали, координата и импульс частиц уже не связаны единственно возможным образом, а включают также время. Однако можно найти

* При $\beta > 0$ возвращающая сила растет с увеличением амплитуды; в этом случае система устойчива для всех начальных амплитуд.

такую величину, связанную с рассматриваемой системой, которая не зависит от времени. Если определить плотность или совокупность возможных начальных состояний системы (возможных начальных значений координат в фазовом пространстве), то для движения, подчиняющегося уравнениям Гамильтона, плотность этих состояний системы останется постоянной вдоль траектории в фазовом пространстве. В § 1.3 определены более точно основные понятия и доказана соответствующая теорема. Смысл ее заключается в следующем. Для системы, состоящей из n частиц и имеющей $3n$ степеней свободы, плотность измеряется в $6n$ -мерном фазовом пространстве. Содержание теоремы упрощается при рассмотрении систем невзаимодействующих частиц. Чтобы получить $6n$ -мерную плотность возможных начальных условий одной частицы, проинтегрируем по координатам всех, кроме одной, частиц в фазовом пространстве. Однако если принять, что все частицы тождественны, то введенное таким образом распределение плотности идентично действительному распределению начальных значений координат самих частиц в фазовом пространстве. Теорема утверждает, что если двигаться вдоль траектории частицы, то в ее окрестности плотность частиц остается постоянной, другими словами, фазовое пространство, занятое частицами, ведет себя как несжимаемая жидкость в $6n$ -мерном пространстве. Так как число частиц остается неизменным, теорема также подразумевает сохранение фазового объема. Хотя теорема носит слишком общий характер, чтобы ею можно было непосредственно воспользоваться при решении проблем динамики частиц, однако она тесно связана с первым интегралом движения в динамических системах. Обсудим эту связь сначала для систем с одной степенью свободы, а затем для систем с более чем одной степенью свободы.

Для системы с одной степенью свободы площадь фазового пространства, ограниченного траекторией осциллирующей частицы, дается выражением

$$J = \oint pdq. \quad (1.13)$$

Множество частиц, которое для заданного значения гамильтониана имеет набор всех значений q , занимает вполне определенное замкнутое фазовое пространство. Если теперь гамильтониан меняется со временем, площадь фазового пространства, занятая этим множеством частиц, остается постоянной в силу теоремы Лиувилля. В общем случае, однако, частицы пересекают большую площадь в фазовом пространстве, чем их начальная площадь. Любая частица осциллирует вдоль гамильтоновой кривой, которая ограничивает область, отличающуюся от той, которую она ограничивала до изменения гамильтониана. Однако если гамильтониан частицы изменяется достаточно медленно, то выражение (1.13), известное как *интеграл действия*, приблизительно сохраняется. Один из методов доказательства этой теоремы использует ее связь с теоремой Лиувилля. Рассмотрим систему, гамильтониан которой первоначально постоя-

нен, потом в течение некоторого промежутка времени меняется и затем снова постоянен. Первоначально кривая постоянного гамильтониана для осциллирующей системы определяет замкнутую область фазового пространства. Если после изменения параметров первоначальная кривая постоянного гамильтониана переходит в другую кривую постоянного гамильтониана, то площадь, ограниченная этой кривой, остается без изменения. Это утверждение сразу становится очевидным, если мы вспомним, что точка в фазовом пространстве однозначно определяет траекторию в фазовом пространстве. Поэтому фазовые точки не могут пересечь границу фазового пространства, так как любая точка, достигающая границы, имеет ту же траекторию, что и граничная точка. Из теоремы Лиувилля следует, что площадь, ограниченная первоначальной орбитой, сохраняется, если начальная и конечная орбиты образованы из одного и того же множества точек фазового пространства, поэтому площади, ограниченные начальной и конечной орбитами, должны быть тождественными, следовательно, чтобы доказать адиабатическую теорему, достаточно доказать, что все частицы, лежащие на кривой постоянного гамильтониана в начальной области, остаются на кривой постоянного гамильтониана и в конечной области.

Можно непосредственно показать, что J является адиабатическим инвариантом движения. Само доказательство тесно связано с фазовым интегралом, или ВКБ-методом (Вентцель, Крамерс, Бриллюэн), которого мы коснемся кратко далее. Гл. 2 посвящена систематическому изложению теории адиабатического постоянства интеграла действия и области ее применимости.

Проиллюстрируем действие теоремы об адиабатическом сохранении площади в фазовом пространстве для систем с одной степенью свободы на примере гармонического осциллятора. Этот пример заслуживает внимания, так как осциллятор с одной степенью свободы имеет небольшие области линейных амплитуд. Сначала рассмотрим уравнение движения гармонического осциллятора с постоянными параметрами (постоянной частотой): $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, решение которого есть $q = q_0 \sin(\omega t + \delta)$, откуда импульс определяется выражением

$$p = m\dot{q} = m\omega q_0 \cos(\omega t + \delta). \quad (1.14)$$

Тогда площадь фазового пространства, или интеграл действия, запишется в виде

$$J = m\omega q_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t + \delta) d(\omega t) = \pi m\omega q_0^2 = 2\pi E/\omega, \quad (1.15)$$

где E — полная энергия осциллятора. Если принять, что ω медленно изменяется от $\omega = \omega_1$ для одной системы до $\omega = \omega_2$ для другой, и если считать, что J в силу адиабатической теоремы —

константа, то можно найти изменение амплитуды и энергии осциллятора, т. е.

$$q_{02}/q_{01} = (\omega_1/\omega_2)^{1/2} \text{ и } E_2/E_1 = \omega_2/\omega_1.$$

Преимущество рассмотрения динамических систем с позиций фазового пространства не ограничено системами, в которых гамильтониан постоянен или медленно изменяется. Этот подход можно с успехом использовать при анализе систем, состоящих из подсистем, гамильтониан которых либо постоянен, либо медленно изменяется, и связанных элементами, в которых гамильтониан изменяется быстро в сравнении с периодом колебания частицы. В таких случаях область фазового пространства, занятая реальными частицами (часто называемая *эмиттансом*), в одной части системы может быть сопоставлена с допустимой областью фазового пространства другой части системы (известной как *акцептанс*). В гл. 3 показано, что область фазового пространства, ограниченная гамильтоновыми кривыми частиц, может быть минимизирована, если согласовать форму эмиттанса и акцептанса.

Фазовые диаграммы для многомерных систем. Если система имеет больше одной степени свободы, то и решение ее уравнений движения может быть найдено при условии, если переменные разделяются и гамильтониан постоянен. В этом случае каждая степень свободы может быть представлена отдельным движением на своей фазовой плоскости и уравнение по каждой переменной может быть сведено к квадратурам независимо от других переменных. Гамильтониан (1.6) — характерный пример гамильтониана для каждой степени свободы. Если переменные не разделяются, то законченное решение обычно получить невозможно, как и в случае непостоянного гамильтониана. Необходимым, но недостаточным условием того, что переменные можно разделить в некоторой координатной системе, является существование интеграла движения для каждой степени свободы. Известно, что в случае одной степени свободы гамильтониан сам является интегралом движения. Исследуем значение еще одного интеграла движения в случае, когда имеются две степени свободы.

Рассмотрим задачу о движении частицы в поле центральных сил, о которой мы уже упоминали ранее. Гамильтониан системы (1.9) можно записать в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) + U(r), \quad (1.16)$$

где $p_\theta = l$ — значение постоянного углового момента. Как уже отмечалось, эта константа разделяет движение с двумя степенями свободы на два независимых движения, каждое с одной степенью свободы. Это можно непосредственно увидеть из (1.16), определяя эквивалентный потенциал $\bar{U}(r) = (l^2/2mr^2) + U(r)$. В случае $U(r) = -k/r$ (задача Кеплера: сила обратно пропорциональна квадрату радиуса) два члена потенциала с их суммой или эквива-

лентный потенциал представлены на рис. 1.4, а. На рисунке представлены также три значения энергии системы или гамильтонианы H_1 , H_2 и H_3 , соответствующие ограниченному, находящемуся на границе устойчивости, и неограниченному движению. Соответствующие точки фазового пространства показаны на рис. 1.4, б [10]. Как видно, движение здесь соответствует одномерному случаю, представленному на рис. 1.3, за исключением того, что сепаратриса для случая на границе устойчивости замыкается на бесконечности. Движение частицы в $(r - \theta)$ -плоскости, соответствующее случаю H_1 , показано на рис. 1.5. Орбита в конфигурационном простран-

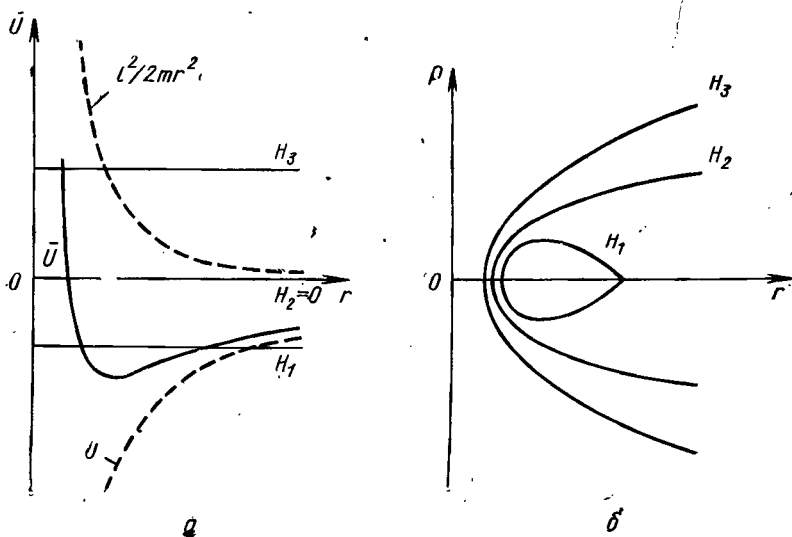


Рис. 1.4. Эквивалентный одномерный потенциал и соответствующая диаграмма в фазовом пространстве для центральной силы, обратно пропорциональной квадрату радиуса.

ве не замкнута, так как отношение периодов по r и θ не равно целому числу. Однако проекция движения на r, p_r -плоскость образует замкнутые петли, что является следствием существования интеграла движения $p_\theta = l$.

Рассмотрим теперь более общий случай частицы, движущейся в трехмерном силовом поле. Траектория в фазовом пространстве однозначно определяется шестью начальными значениями координат фазового пространства и временем. Если движение ограничено, могут существовать определенные фазовые плоскости одной пространственной координаты и ее канонического импульса, плоскость неоднократно пересекается траекторией. Эту фазовую плоскость Пуанкаре назвал *поверхностью сечения*. Примером поверхности сечения может служить любая r, p_r -фазовая плоскость при движении в поле центральных сил. Если существует поверхность сечения,

мы можем отметить точки пересечения траектории с плоскостью; положения этих точек в общем случае носят случайный характер. Это не дает нам новой информации в дополнение к первоначальному предположению, что движение ограничено. Если существует константа движения, то она может быть использована, чтобы исключить одну из переменных, так что та же картина может быть получена независимо от координаты, соответствующей этой переменной, т. е. для всех значений дополнительной координаты картина проекции движения на плоскость будет той же самой. Например, в случае центральных сил постоянство H приводит к тому, что пересечения траектории с r, p_r -плоскостью не зависят от времени, а постоянство p_θ приводит к независимости от θ пересечений траекторий с фазовой плоскостью r, p_r . Если мы можем таким образом избавиться от всех переменных, путь в оставшейся фазовой плоскости должен образовывать однозначную кривую. Таким образом, существование констант движения может быть определено изучением пересечений траекторий с поверхностью сечения. Как только установлено существование констант движения, гладкие кривые могут

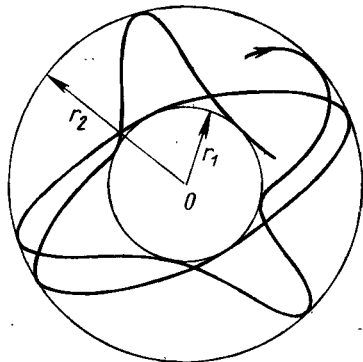


Рис. 1.5. Иллюстрация ограниченных орбит, соответствующих гамильтониану H_1 на рис. 1.4.

быть исследованы на локальную устойчивость и другие особенности. Интеграл движения, известный в механике небесных тел как *изолирующий интеграл*, выделяет одну степень свободы среди других и обычно уменьшает число переменных на две. Если интегралы движения выбраны так, что являются каноническими импульсами, то они автоматически являются изолирующими интегралами. Это видно на примере движения в поле центральных сил, в котором постоянство углового момента обеспечивало независимость гамильтониана от θ и вело к уменьшению числа степеней свободы на единицу, а переменных — на две. Но если бы мы выбрали прямоугольную систему координат, чтобы описать движение в поле центральных сил, гамильтониан (1.16) принял бы вид

$$H = (1/2m)(p_x^2 + p_y^2) + U(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (1.17)$$

где $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$. Вспоминая, что угловой момент P_θ сохраняется, мы можем в (1.17) избавиться от одной из переменных (скажем, p_y) с помощью выражения $p_y^2 = l^2$ и соотношения между прямоугольными и полярными координатами, в результате чего получим

$$H = \frac{1}{2m} \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2} p_x^2 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{l^2}{x^2 + y^2} \right) \right] + U. \quad (1.18)$$

Эта процедура уменьшила число переменных всего лишь на единицу. Так, чтобы выразить интеграл движения, очень важно выбрать соответствующую координатную систему. Преимущественная система координат — система координат *угол — действие*, в которой в качестве координаты импульса взят интеграл действия, а в качестве координаты положения — функция угла. Часто оказывается, что интегралы действия являются интегралами движения, таким образом удовлетворяя описанному выше критерию для выбора системы координат. К примеру, угловой момент при движении в поле центральных сил является интегралом действия. Если различные

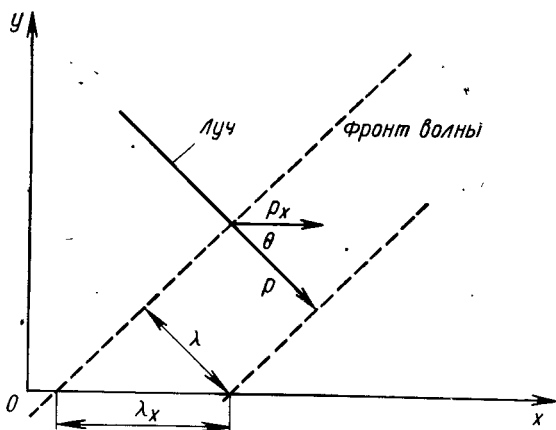


Рис. 1.6. Связь между импульсом и длиной волны в геометрической оптике.

степени свободы отвечают колебательным движениям с достаточно отличающимися периодами, то даже в отсутствие полного разделения координат переменные *действия* адиабатически постоянны и, таким образом, допускают разделение переменных для каждой степени свободы.

Оптическая аналогия. Очевидно, что прямолинейные траектории движущихся частиц подобны лучам света в однородной среде и что многие понятия оптических систем имеют аналоги при фокусировке заряженных частиц. Не удивительно, что методы лучевой оптики часто используются в теории фокусировки электронных пучков. И наоборот, определенные методы описания движения частиц, такие, например, как метод, описывающий прохождение частиц через линейные системы, используются в оптике. К тому же существует полная аналогия между гамильтоновой механикой и геометрической оптикой, хотя хорошо известно, что аналогия не нашла широкого применения в оптике. Причины этого носят исторический характер. Гамильтонов формализм используется в вопросах теории динамики, аналогичных геометрической оптике,

недавно, в то время как соответствующие проблемы в оптике описывались другими методами намного раньше.

Аналогия между гамильтоновой механикой и геометрической оптикой заключается в формальном тождестве между гамильтоновой характеристической функцией и эйконалом. Из этой связи следует, что волновая скорость u обратно пропорциональна импульсу p . Хотя эта аналогия первоначально использовалась, чтобы продемонстрировать связь между классической и волновой механикой (см. [10]), она также может быть использована, чтобы связать проекцию луча с импульсом. Это проиллюстрировано на рис. 1.6. Прямая линия обозначает луч, определенный как нормаль к фронту волны, а пунктирные линии обозначают фронт волны. Расстояние между фронтами равной фазы — длина волны λ , пропорциональная скорости волны u . Из рисунка видно, что длина волны в направлении, отличном от направления распространения волны, меняется обратно пропорционально косинусу угла между ними, так что λ_x равно $\lambda/\cos\theta$. Если, однако, мы можем связать проекцию луча с импульсом, тогда проекция импульса $p \cos \theta$ меняется в зависимости от угла обратно пропорционально изменению скорости. Далее будет проведена параллель между механикой и геометрической оптикой и показано, что такую связь действительно можно осуществить. Тогда можно использовать в оптике все понятия преобразования фазового пространства. Применим также некоторые простые свойства оптических линз, соответствующие преобразованиям фазового пространства в динамических системах. Хотя будет использовано только несколько примеров из оптики, ясно, что вся теория, развитая в этой работе, годится для решения задач оптики. Методы динамики частиц в оптике будут очень тесно связаны с содержанием гл. 3, где динамические системы близки к оптическим. В статической электронной оптике, в которую время явно не входит, очень полезны оптические аналогии.

§ 1.2. Интегралы движения

Канонические преобразования. Кратко остановимся на понятиях гамильтоновой механики, которые нам будут необходимы при изучении динамики движения частиц [10]. Однако большая часть длинных доказательств не приводится. Если материал окажется для читателя незнакомым, советуем обращаться к Голдстейну. С помощью координатных преобразований можно получить различные эквивалентные формы уравнений движения. Одну из таких форм можно получить, вводя функцию Лагранжа

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - U(q, t), \quad (1.19)$$

где q и \dot{q} пробегают все степени свободы; T — кинетическая энергия; U — потенциальная энергия; считаем, что связи не зависят от

времени. Уравнения движения в лагранжевой форме для каждой координаты q_i имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1.20)$$

где Q_i — силы, не вытекающие из потенциала (силы трения). Уравнения (1.20) могут быть также выведены из вариационного принципа ($\delta \int L dt = 0$) или непосредственным сравнением с ньютоновскими законами движения. Если мы определим гамильтониан через

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (1.21)$$

не определяя пока p_i , продифференцируем H , то получим

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ &= \sum_i \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \\ &- \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - Q_i \right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где выражение (1.20) подставлено в третью сумму с правой стороны. Если затем определить p_i посредством выражения

$$p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}_i, \quad (1.23)$$

то первая сумма с правой стороны тождественно обратится в нуль, и, приравняв коэффициенты при одинаковых дифференциалах, получим форму уравнений движения, содержащую только первые производные:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -(\partial H / \partial q_i) + Q_i; \\ q_i &= \partial H / \partial p_i; \\ \partial L / \partial t &= -\partial H / \partial t. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Здесь p_i — обобщенный импульс, который для случая, обсуждавшегося ранее, сводится к обычному импульсу. В последующих параграфах мы будем предполагать, что все силы имеют потенциал; в этом случае $Q_i = 0$ и (1.24) сводится к (1.1) — каноническим уравнениям Гамильтона.

В ситуациях, где не могут быть полностью решены уравнения движения, можно получить значительную информацию относительно движения частиц, если есть возможность найти интегралы движения. Ранее качественно показано, каких упрощений можно добиться при существовании таких интегралов. Выведем некоторые свойства констант движений для гамильтоновых систем. Записывая пол-

ную производную по времени от произвольной функции $\chi = \chi(q, p, t)$ и подставляя уравнения Гамильтона (1.1), получаем

$$\frac{d\chi}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \chi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Если χ не зависит явно от времени $\partial \chi / \partial t = 0$ и коммутирует с гамильтонианом, то член в круглых скобках исчезает, и χ — интеграл движения. Ясно, что если гамильтониан не является явной функцией времени, то он — интеграл движения. Если мы в качестве функции χ возьмем одну из компонент импульса (предполагается, что она неявная функция времени), а соответствующая координата — циклическая в гамильтониане (т. е. $\partial H / \partial q_i = 0$), из (1.20) или непосредственно из уравнений Гамильтона получаем, что $dp_i / dt = 0$, и, таким образом, p_i — интеграл движения:

$$p_i = \alpha_i. \quad (1.26a)$$

Для гамильтониана, не зависящего явно от времени, и для специального случая, когда все координаты циклические,

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial \alpha_i = v_i. \quad (1.26b)$$

Интегрируя, получаем соотношение

$$q_i = v_i t + \beta_i, \quad (1.26b)$$

которое дает решение для временной зависимости переменных. Если можно найти такое преобразование, которое переводит все импульсы в константы, то выражения (1.26) — решения в преобразованной системе координат. Тогда обратное преобразование дает полное решение, записанное в первоначальных координатах.

Мы уже нашли преобразование от лагранжевой формы с переменными q, \dot{q} к гамильтоновым переменным q, p . Более общее преобразование ведет к теории Гамильтона — Якоби классической механики. Для перехода от переменных q, p к новой группе переменных \bar{q}, \bar{p} их можно связать посредством функции, зависящей от одной старой и одной новой переменных. Так как лагранжиан выводится из вариационного принципа, то, используя (1.21), имеем

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right) dt \right] = 0, \quad (1.27)$$

запись можно сделать либо для координат с черточкой, либо для координат без черточки. Таким образом, подынтегральное выражение (1.27) для двух групп координат отличается самое большее на полный дифференциал некоторой функции, что можно выразить следующим образом:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) =$$

$$= \sum_i \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - \bar{H}(\bar{p}, \bar{q}, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, \bar{q}, t), \quad (1.28)$$

где мы произвольно предположили, что F_1 — функция q и \bar{q} . Расписывая полную производную от F_1 , получаем

$$\frac{d}{dt} F_1(q, \bar{q}, t) = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i} \dot{\bar{q}}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (1.29)$$

Считая, что переменные в (1.29) независимы, находим, сравнивая члены в (1.28) и требуя, чтобы члены при \dot{q}_i и $\dot{\bar{q}}_i$ равнялись нулю, что

$$p_i = \partial F_1 / \partial q_i; \quad (1.30a)$$

$$\bar{p}_i = -\partial F_1 / \partial \bar{q}_i \quad (1.30б)$$

и

$$\bar{H} = H + \partial F_1 / \partial t. \quad (1.30в)$$

Можно также определить произвольные функции как функции других пар переменных:

$$F_2(q, \bar{p}, t), F_3(p, \bar{q}, t), F_4(p, \bar{p}, t).$$

Если, к примеру, образуем F_2 преобразованием Лежандра

$$F_2(q, \bar{p}, t) = F_1(q, \bar{q}, t) + \sum_i \bar{q}_i \bar{p}_i, \quad (1.31)$$

то получим уравнения преобразования:

$$p_i = \partial F_2 / \partial q_i; \quad (1.32)$$

$$\bar{q}_i = \partial F_2 / \partial \bar{p}_i; \quad (1.33)$$

$$\bar{H} = H + (\partial F_2 / \partial t). \quad (1.34)$$

Функции F_3 и F_4 определяются преобразованиями, сходными с (1.31), которые ведут к соответствующим уравнениям преобразования.

С помощью этих преобразований можно показать, хотя бы формально, как могут быть решены уравнения движения динамической системы. Заслуживают интереса два случая: один — с зависящим от времени гамильтонианом, другой — с гамильтонианом, не зависящим от времени. В первом случае положим $\bar{H} \equiv 0$, что эквивалентно преобразованию к новым координатам и импульсам, производные по времени от которых, как следует из канонических уравнений движения, равны нулю. Таким образом, координаты и импульсы сами являются константами, что можно конкретизировать как начальные значения непреобразованных величин. Таким образом, уравнения преобразования являются в действительности реше-

нием, дающим координату и импульс в любой момент времени в зависимости от начальных значений. Подставляя (1.32) в (1.34) с $\dot{H} = 0$, получаем дифференциальное уравнение в частных производных:

$$H(q, \partial F_2 / \partial q, t) + \partial F_2 / \partial t = 0, \quad (1.35)$$

где F_2 — решение (1.35), обычно называемое главной функцией Гамильтона. Для случая, в котором H не зависит от времени, нужно только положить \dot{H} равным константе, и преобразование (1.34) примет вид

$$H(q, \partial F_2 / \partial q) = H_0 \quad (1.36)$$

с решением в форме (1.26). Здесь F_2 известна как характеристическая функция Гамильтона, обычно обозначаемая W . Оказывается, пока (1.35) или (1.36) не разделены, их также трудно решить, как и первоначальную группу канонических уравнений. Однако из исследования этих уравнений можно почерпнуть много полезного. Для H , не зависящего от времени, F_2 не зависит явно от времени и, так как $\dot{p} = 0$, полная производная по времени от F_2 дается выражением

$$dF_2/dt = \sum_i (\partial F_2 / \partial q_i) \dot{q}_i = \sum_i p_i \dot{q}_i, \quad (1.37)$$

интегрируя которое, получаем

$$F_2 = \int \sum_i p_i dq_i. \quad (1.38)$$

Для колебательных систем интеграл от F_2 за период, как видно, является обобщением интеграла (1.12). В следующем разделе данного параграфа покажем, что для постоянного H

$$\oint \sum_i p_i dq_i = \text{const}, \quad (1.39)$$

т. е. значение F_2 , полученное в результате интегрирования по замкнутому пути, — интеграл движения.

Для периодической системы, в которой можно разделить координаты для каждой степени свободы,

$$\oint p_i dq_i = \text{const}$$

для каждого i , данные выражения могут служить затем в качестве соответствующей группы импульсных переменных для получения полного решения в форме (1.26).

Интегральные инварианты. Довольно подробно обсуждены значения инвариантов движения. Теперь мы можем рассмотреть класс инвариантов, называемых *интегральными инвариантами Пуанкаре* [19]. Как будет показано, эти инварианты тесно связаны с интегралами действия. Содержание этого пункта близко к материалу работы [23].

Система n обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (1.40)$$

определяет движение точки (x_1, \dots, x_n) в пространстве n измерений. Мы определяем интегральный инвариант движения m -порядка как интеграл от некоторой функции координат, причем интеграл от этой функции, взятый по $m \leq n$ переменным, не зависит от времени. Интегральный инвариант первого порядка имеет вид

$$\int \sum_i M_i(x, t) dx_i, \quad (1.41)$$

где интегрирование выполнено в фиксированный момент времени. Можно непосредственно найти условие независимости выражения (1.41) от времени. Дифференцируя (1.41) по времени, получаем выражение

$$\int \sum_i \left(\frac{dM_i}{dt} dx_i + M_i \frac{d}{dt} dx_i \right) = 0, \quad (1.42)$$

которое удовлетворяется для всех значений dx_i , только если член в круглых скобках равен нулю для каждого значения i . Если известен первый интеграл дифференциальных уравнений, скажем, $F(x, t) = \text{const}$, то можно определить и интегральный инвариант. Полагая $M_i = \partial F / \partial x_i$ в (1.42), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} X_k \right] + \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{dF}{dt} \right) = 0.$$

Это выражение удовлетворяется для всех $F = \text{const}$. Поэтому, подставляя $\partial F / \partial x_i$ вместо M_i в (1.41), получаем в качестве интегрального инварианта выражение

$$\int \sum_i (\partial F / \partial x_i) dx_i. \quad (1.43)$$

Как можно показать, для систем, подчиняющихся каноническим уравнениям Гамильтона, важным интегральным инвариантом следующего более высокого порядка является

$$\iint \sum_i dp_i dq_i \Big|_{t=t_0}, \quad (1.44)$$

где $|_{t=t_0}$ означает, что интеграл должен вычисляться для постоянного момента времени. Пусть система описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{q}_i = G_i; \quad \dot{p}_i = -F_i. \quad (1.45)$$

Покажем, что если (1.44) — интегральный инвариант, то $G_i = \partial H / \partial p_i$ и $F_i = \partial H / \partial q_i$, где G_i и F_i — функции всех координат, импульсов и времени t . Если предположить что существует интегральный вариант вида (1.44), то интеграл должен быть определен

двумя величинами λ и μ , которые не зависят от времени. Поэтому приравниваем (1.44) константе и выражаем через новые переменные с помощью якобиана

$$\iint \sum_i \left(\frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (\lambda, \mu)} \right) d\lambda d\mu = \text{const},$$

откуда следует

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (\lambda, \mu)} = 0.$$

Дифференцируя и используя выражение (1.45), получаем

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial (G_i, p_i)}{\partial (\lambda, \mu)} + \frac{\partial (q_i, -F_i)}{\partial (\lambda, \mu)} \right\} = 0.$$

Так как G_i и F_i — функции q_i и p_i , полученное выше выражение можно записать в следующем виде:

$$\sum_i \sum_k \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial (q_k, p_i)}{\partial (\lambda, \mu)} + \frac{\partial G_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial (p_k, p_i)}{\partial (\lambda, \mu)} - \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial (q_i, q_k)}{\partial (\lambda, \mu)} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial (q_i, p_k)}{\partial (\lambda, \mu)} \right\} = 0.$$

Расписывая определители и требуя, чтобы коэффициенты при членах, таких, как $(\partial q_k / \partial \lambda)$ $(\partial p_i / \partial \mu)$, равнялись бы нулю (λ и μ выбраны произвольно), получаем $(\partial G_i / \partial q_k) - (\partial F_k / \partial p_i) = 0$. Это выражение удовлетворяется тождественно, если G_i и F_i определяются из гамильтониана, т. е.

$$G_i = \partial H / \partial p_i, \quad F_k = \partial H / \partial q_k.$$

Таким образом, (1.44) — интегральный инвариант гамильтоновой системы. Для систем с одной степенью свободы имеем

$$\frac{d}{dt} \iint dp_i dq_i = 0.$$

Это является доказательством сохранения площади фазового пространства системы частиц, т. е. доказательством теоремы Лиувилля для двух измерений. В следующем параграфе это доказательство будет обобщено на многомерные системы. Для каждой независимой степени свободы соответствующий член в (1.44) должен быть константой, и, таким образом, повторяя наши рассуждения при выводе выражения (1.43), получаем, что интегралы движения существуют для каждой независимой степени свободы. Это подтверждает сделанное во введении утверждение, что для системы, у которой гамильтониан постоянен, каждая независимая степень свободы может быть сведена к квадратурам.

Применяя теорему Стокса к (1.44), получаем другой интегральный инвариант, известный как относительный инвариант системы:

$$\oint \sum_i p_i dq_i |_{t=t_0} = \text{const}, \quad (1.46)$$

где интегрирование проводится по замкнутому пути. В общем случае применение теоремы Стокса уменьшает порядок интегрирования на единицу и преобразует интегральный инвариант по произвольной области в относительный инвариант по замкнутой области. Относительные интегральные инварианты особенно важны при изучении колебательных систем, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Уравнение (1.46) может быть обобщено, если интегрировать по любому замкнутому пути в фазовом пространстве, включая те, в которых меняется время. Вариационный принцип, из которого выводятся гамильтоновы уравнения движения, обычно записывается в виде

$$\delta \int \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{dq_i}{dt} - H \right) dt = 0, \quad (1.47)$$

где δ — вариация некоторого параметра, не зависящего от времени. Та же самая вариация имеет силу при интегрировании по любому параметру, который не зависит от вариации, обозначаемой δ . Выберем такую переменную θ и перепишем (1.47)

$$\delta \int \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{dq_i}{d\theta} - H \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = 0.$$

Полагая $p_{n+1} = -H$, $q_{n+1} = t$, получаем новую форму вариационного уравнения:

$$\delta \int \sum_{i=1}^{n+1} p_i (dq_i/d\theta) d\theta = 0.$$

Выражение (1.46) может быть переписано в виде

$$\oint \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i |_{\theta=\theta_0} = \text{const},$$

где интегрирование происходит при $\theta = \text{const}$, но так как θ выбрано произвольно, то новый путь, который теперь включает вариацию времени, может быть выбран так, что часть его лежит вдоль действительной траектории в фазовом пространстве. В частности, для колебательной системы с одной степенью свободы имеем

$$\oint (pdq - Hdt) = \text{const}. \quad (1.48)$$

Для специального случая $H = \text{const}$ второй член при интегрировании по замкнутому пути исчезает и тогда $\oint pdq = \text{const}$. Если выбрать траекторию в виде одного витка вокруг трубки, показан-

ной на рис. 1.7, видно, что путь интегрирования состоит из двух частей, так что

$$\oint pdq = \int_{C_1} pdq + \int_{C_2} pdq, \quad (1.49)$$

где C_1 — путь вдоль одного полного витка. Для периодических систем конечные точки пути C_1 имеют одинаковые значения q и, таким образом, путь C_2 может быть выбран так, что $q = \text{const}$. Поэтому $\int_{C_2} pdq = 0$ и из (1.49)

$$\int_{C_1} pdq = \text{const}. \quad (1.50)$$

Таким образом, для постоянного гамильтониана площадь фазового пространства является интегралом движения. Если гамильтониан изменяется, то, используя выражение (1.48), получаем,

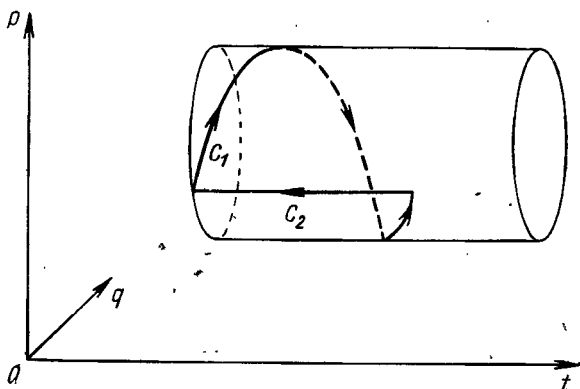


Рис. 1.7. Путь в фазовом пространстве при вычислении интеграла действия расширенной системы.

что площадь фазового пространства, определенная выражением (1.50), уже не постоянная величина. Однако если H заметно не меняется в течение периода, то можно показать, что (1.50) приблизительно удовлетворяется по истечении многих колебаний, в продолжение которых само H может значительно измениться. Утверждение об *адиабатической* инвариантности траектории в фазовом пространстве частицы с медленно изменяющимся гамильтонианом подробно обсуждается в гл. 2.

Переменные угол — действие. Для периодических систем с постоянным гамильтонианом существует интеграл движения для некоторой степени свободы, если движение системы по ней не зависит от ее движения по другим степеням свободы. Интеграл движения может быть связан с интегралом действия, вычисленным по одному полному периоду. Это ведет к тому, что если принять за обобщенный импульс интеграл действия, то соответствующая ко-

ордината будет циклической в гамильтониане и, как и в случае (1.26), будет получено полное решение для данной степени свободы. Предполагая, что преобразование к новым координатам в (1.32), (1.33), (1.34) выбрано так, что F_2 удовлетворяет (1.36) и в качестве новых импульсов образует переменные действия, посмотрим, к каким следствиям это приведет. Мы образуем интеграл действия, записанный через эти новые переменные, обычным путем:

$$J_i = \oint p_i dq_i = \oint \frac{\partial F_2(q_i, J_1, \dots, J_n)}{\partial q_i} dq_i, \quad (1.51)$$

где J_1, \dots, J_n — преобразованные постоянные импульсы. Соответствующая обобщенному импульсу координата имеет вид (1.26):

$$\bar{q}_i = \nu_i t + \beta_i. \quad (1.52)$$

Интегрируя по \bar{q}_i за полный период τ , имеем

$$\Delta \bar{q}_i = \int_t^{t+\tau} d\bar{q}_i = \nu_i \tau, \quad (1.53)$$

но из (1.33) $d\bar{q}_i = (\partial/\partial q_i) (\partial F_2/\partial J_i) dq_i$. Подставляя в (1.53), меняя порядок дифференцирования и интегрируя по периоду, получаем

$$\Delta \bar{q}_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_i dq_i = 1. \quad (1.54)$$

Сравнивая (1.54) с (1.53), видим, что

$$\nu_i \tau = 1, \quad (1.55)$$

т. е. константа ν_i — просто частота колебаний. Таким образом, запись уравнений движения через переменные угол — действие, с одной стороны, дает удобный метод получения частот колебаний системы, а с другой — устанавливает связь между импульсом и координатой для любой совокупности начальных условий. Так как интеграл действия может быть также адиабатическим интегралом движения, запись уравнений движения через переменные угол — действие найдет применение в теории адиабатических инвариантов. Развитый выше формализм будет использован в гл. 2.

Мы уже отмечали, что решения без труда находятся только в том случае, если гамильтониан, выраженный через гамильтонову характеристическую функцию, разделяется по переменным. Следуя стандартному обозначению, заменяем F_2 на W в (1.36) и получаем

$$H(q, \partial W/\partial q) = E, \quad (1.56)$$

а так как W разделяется, оно может быть записано в форме

$$W = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (1.57)$$

где α связана с n константами движения, и если

$$H = \sum_i H_i(q_i, \partial W_i / \partial q_i),$$

получаем следующие уравнения:

$$H_j(q_j, \partial W_j / \partial q_j) = - \sum_{i, i > j} H_i = \alpha_j. \quad (1.58)$$

Здесь последнее равенство имеет смысл, так как q_i и q_j — независимы. Затем можно найти $\partial W / \partial q_i$, которое зависит от q_i . Мы уже сделали это ранее менее формальным путем, когда исследовали уравнение движения тела в двумерном поле центральных сил.

Теперь снова вернемся к этой задаче как к примеру использования переменных угол — действие. Из (1.10) гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r) = E,$$

где $p_\theta = l$ — константа. Это выражение, записанное через характеристическую функцию, принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2m} \left[(\partial W_r / \partial r)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial W_\theta / \partial \theta)^2 \right] + U(r) = E,$$

где использовано преобразование (1.32), (1.33), (1.34), а именно, что $p_i = \partial W / \partial q_i$, и тот факт, что W разделяется по переменным [см. (1.57)]. Умножая все выражение на $2mr^2$, можно привести гамильтониан к виду, в котором переменные разделяются:

$$(\partial W_\theta / \partial \theta)^2 = 2mr^2 [E - (1/2m) (\partial W_r / \partial r)^2 - U(r)] = l^2. \quad (1.59)$$

Получен постоянный угловой момент, который, конечно, непосредственно следовал из того факта, что θ — циклическая координата, т. е. не входит явно в гамильтониан. Второе уравнение в (1.59) дает

$$(\partial W_r / \partial r)^2 = 2m[E - U(r)] - (l^2/r^2). \quad (1.60)$$

Можно было бы решить дифференциальное уравнение для производящей функции. Вместо этого мы вводим переменные действия

$$J_\theta = \int p_\theta d\theta = \int (\partial W_\theta / \partial \theta) d\theta \quad (1.61a)$$

и

$$J_r = \int p_r dr = \int \frac{\partial W_r}{\partial r} dr, \quad (1.61b)$$

которые сводят задачу решения дифференциальных уравнений к вычислению интегралов, т. е. к квадратурам. Подставляя (1.59) и (1.60) в (1.61a) и (1.61b) соответственно, получаем

$$J_\theta = \int_0^{2\pi} l d\theta = 2\pi l \quad (1.62a)$$

и

$$J_r = \int \left[2m [E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2} \right]^{1/2} dr. \quad (1.62б)$$

Если, к примеру, $U(r) = -k/r$ — потенциал, соответствующий силе притяжения, которая убывает пропорционально квадрату радиуса, то простое интегрирование (см. [10]) приводит к константе

$$J_r = -2\pi l + \pi k (2m/-E)^{1/2}.$$

В результате преобразований получаем

$$H = E = -(2\pi^2 m k^2)/(J_r + J_\theta)^2,$$

где вместо $2\pi l$ подставлено J_θ . Отметим, что переменные действия появляются только в виде суммы, следовательно, существует только одна частота колебаний

$$\nu = \partial H / \partial J_r = \partial H / \partial J_\theta = (4\pi m k^2)/(J_r + J_\theta)^3,$$

дающая замкнутую орбиту. Если центральная сила имеет другую зависимость по r , орбита не будет больше замкнутой.

Эквивалентность классической механики и геометрической оптики. Как уже отмечалось, вся теория фазового пространства может быть применена к тем задачам оптики, для которых действительная геометрическая интерпретация. Выведем математические соотношения, которые продемонстрируют тождество гамильтоновой характеристической функции с оптической длиной пути, или *эйконом* геометрической оптики.

Распространение волн в однородной изотропной среде описывается скалярным волновым уравнением

$$\nabla^2 \Phi + (n^2/c^2) \cdot (\partial^2 \Phi / \partial t^2), \quad (1.63)$$

которое допускает решение в виде плоской волны

$$\Phi = \Phi_0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$$

где ω — частота; \mathbf{k} — волновое число $k = n\omega/c$; n — коэффициент преломления среды, т. е. отношение скорости распространения волны в среде к скорости света в вакууме c . Если среда неоднородна, т. е. $n = n(\mathbf{r})$, то нужно искать решения, в которых как \mathbf{k} , так и Φ_0 — функции \mathbf{r} . Далее будем постоянно использовать эти общие методы, особенно в гл. 2 при исследовании уравнений с изменяющимися параметрами. Запишем видоизмененное волновое решение уравнения

$$\Phi = \exp A(\mathbf{r}) \exp \{i k_0 [L(\mathbf{r}) - ct]\}, \quad (1.64)$$

где $\exp A(\mathbf{r})$ — меняющаяся амплитуда; для удобства $\mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$ запишем как $k_0 L(\mathbf{r})$, где k_0 — волновое число для пустого пространства и $L(\mathbf{r})$ — оптическая длина пути, т. е. для n -константы $L = nz$, здесь z — проекция \mathbf{r} вдоль \mathbf{k} . Подставляя (1.64) в (1.63) и сокращая на экспоненциальный множитель, получаем два уравнения для действительной и мнимой частей, которые должны быть порознь равны

нулю, так как фаза волны произвольна. Эти два уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2 [n^2 - (\nabla L)^2] &= 0; \\ \nabla^2 L + 2 \nabla A \nabla L &= 0. \end{aligned}$$

Если теперь предположить, что изменение показателя преломления мало на расстоянии, равно длине волны, то в первом уравнении можно пренебречь первыми двумя членами по сравнению с членами, содержащими $k_0^2 = (2\pi/\lambda)^2$, тогда приблизительно получаем

$$(\nabla L)^2 - n^2(r) = 0. \quad (1.65)$$

Предположение, что длина волны мала по сравнению с размерами системы, которое ведет к (1.65), — предположение геометрической оптики, а (1.65) известно как уравнение эйконала, или длины оптического пути геометрической оптики. Покажем, что для гамильтоновых систем, не зависящих от времени, выражение (1.65) идентично уравнению для гамильтоновой характеристической функции W . В декартовой системе координат гамильтониан частицы, движущейся в поле, не зависящем от времени, имеет вид

$$\sum_{i=1}^3 (p_i^2/2m) + U(q_i) = H_0. \quad (1.66)$$

Это уравнение после подстановки вместо p_i выражения (1.32а) $\partial F_2 / \partial q_i = p_i$ принимает вид

$$(\nabla F_2)^2 = 2m [H_0 - U(r)], \quad (1.67)$$

где использованы векторные обозначения. Как видно, уравнение (1.67) по своему виду идентично уравнению (1.65) и, таким образом, поведение эйконала в оптике аналогично поведению характеристической функции в механике. Эта аналогия первоначально использовалась, чтобы показать, что гамильтонову механику можно рассматривать как аппроксимацию геометрической оптики на волновую механику. Однако для наших целей необходимо сделать дополнительный шаг — определить связь между энергией и частотой ($E = h\nu$). Чтобы закончить отождествление, покажем, что оптический импульс направлен вдоль луча и обратно пропорционален волновой скорости, как постулировалось в § 1.1. Первое из этих утверждений верно из аналогии с механикой, где $\mathbf{p} = \nabla F_2$, так что оптический импульс направлен вдоль ∇L . Чтобы получить связь со скоростью, отождествим линии постоянства F_2 с линиями постоянства W , т. е. положим, что F_2 удовлетворяет уравнению для гамильтоновой характеристической функции (1.36). Если затем мы попытаемся найти решение уравнения (1.35) относительно главной гамильтоновой функции S для случая, когда H не зависит от времени и только второй член включает время t , то мы сможем отделить переменную t , предполагая, что S имеет следующий вид:

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - H_0 t.$$

Это позволяет свести (1.35) к форме (1.36):

$$H(q_i, \partial W / \partial q_i) = H_0$$

(здесь намеренно использован индекс i , чтобы избежать двусмысленности в постоянном моменте a_i). Таким образом, если сохранять S постоянным, то линии W , которые совпадают с линиями постоянных S в момент времени $t = 0$, отходят от точки этого соприкосновения согласно уравнению $dW = H_0 dt$. Так как dW также связано с обычным расстоянием выражением $dW = \|\nabla W\| ds$, получаем зависимость для скорости W :

$$u = ds/dt = H_0 / \|\nabla W\| = H_0 / \|p\|.$$

Поэтому мы провели аналогию между линиями постоянного W с волновыми фронтами, которые движутся со скоростью, обратно пропорциональной импульсу, и подчиняются уравнению эйконала геометрической оптики $(\nabla W)^2 = n^2(r)$, где $n^2(r) = 2m [(H_0) - V(r)]$. Таким образом, световой луч можно отождествить с вектором импульса частицы, движение которой описывается теоремами динамики.

§ 1.3. Сохранение фазового объема

Введение. Ранее было показано, что для систем с одной степенью свободы, удовлетворяющих уравнениям Гамильтона, площадь фазового пространства, пронизываемого траекториями частиц, от времени не зависит. Эта теорема с помощью сходного доказательства может быть распространена на многомерный фазовый объем (см., например, [1]). Подойдем к этой проблеме несколько иным путем, используя понятия статистической механики. Распространим доказательство на системы, которые включают негамильтоновы силы, т. е. силы, не имеющие потенциальной функции. Хотя большинство последующих рассмотрений будет ограничено гамильтоновыми системами, но из рассмотрения более общего случая можно получить определенные интересные выводы.

Теорема Лиувилля. Если включить непотенциальные силы, то уравнения Гамильтона (1.1) могут быть обобщены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -(\partial H / \partial q_i) + Q_i; \\ \dot{q}_i &= \partial H / \partial p_i, \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

где Q_i — непотенциальные силы. Как и раньше, i пробегает $3n$ значений, соответствующих степеням свободы системы, которая для определенности может быть рассмотрена как состоящая из n частиц.

Опишем движение группы частиц через движение одной точки, представляющей частную конфигурацию всех частиц системы в $6n$ -мерном фазовом пространстве. Если бы были точно известны начальные условия, то уравнения Гамильтона задавали бы в $6n$ -мер-

ном пространстве траекторию точки, описывающей движение системы. Однако начальные условия не могут быть точно заданы, поэтому рассмотрим ансамбль групп частиц, каждая из которых представляет возможное состояние системы. Информация, которая имеется о системе, позволяет сказать, что некоторая конфигурация частиц более вероятна, чем другие. Это мы выразим, задавая функцию распределения плотности ансамбля или распределение плотности точек системы в фазовом пространстве, или, более кратко, распределение плотности фазовых точек

$$\tau = \tau(p_1, \dots, p_{3n}, q_1, \dots, q_{3n}) \quad (1.69)$$

(τ — может быть функцией, явно зависящей от времени, но здесь этот символ опустим), так что наиболее вероятные конфигурации изображаются более высокой плотностью в фазовом пространстве. Более точно, если τ нормировать так, что

$$\int \tau(p, q) \prod_{i=1}^{3n} dp_i dq_i = 1, \quad (1.70)$$

по всему пространству

то $dN = \tau(p, q) \prod_{i=1}^{3n} dp_i dq_i$ — вероятность того, что реальная конфигурация имеет частицу, координата которой заключена между q_i и $q_i + dq_i$, а импульс — между p_i и $p_i + dp_i$, и аналогичным образом для $3n$ координат системы, состоящей из n частиц. Здесь, как и раньше, $\tau(p, q)$ — сокращенное обозначение τ , которая выражается соотношением (1.69).

Рассмотрим теперь бесконечно малый объем в фазовом пространстве

$$dv = \prod_{i=1}^{3n} dp_i dq_i \quad (1.71)$$

и найдем, как изменяется число фазовых точек внутри этого бесконечно малого объема. Находя вклад от изменения числа фазовых точек вдоль одной координатной оси и суммируя по всем осям, мы получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial dN}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{3n} \left[\frac{\partial}{\partial p_i} (\tau \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i} (\tau \dot{q}_i) \right] \right) \prod_{i=1}^{3n} dp_i dq_i = 0, \quad (1.72)$$

которое и дает степень изменения числа фазовых точек dN внутри бесконечно малого объема. Деля это выражение на объем, получаем уравнение, описывающее степень изменения плотности в фиксированной точке фазового пространства:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3n} \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \tau \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \tau \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (1.73)$$

Подставляя из уравнений Гамильтона (1.68) выражения для \dot{p}_i и

\dot{q}_i во второй и четвертый члены суммы (1.73) и переставляя члены, получаем

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{3n} \tau \frac{\partial Q_i}{\partial p_i}. \quad (1.74)$$

Уравнение (1.74) — обобщенная форма теоремы Лиувилля; левая часть — раскрытое выражение полного изменения плотности в окрестности частицы.

Мы можем также выразить эту теорему через фазовый объем, следуя за соответствующей группой фазовых точек. Число фазовых точек в малом объеме фазового пространства v задается выражением $N = \tau v$, где v берется достаточно малым, чтобы мы могли считать τ постоянным в этом объеме. Дифференцируя по времени, получаем

$$[dN/dt = \tau'_i (dv/dt) + v (d\tau/dt) = 0,$$

полная производная по времени от N равна нулю, так как мы предполагаем, то граница фазового объема изменяется так, что полное число частиц остается неизменным. Подставляя вместо $d\tau/dt$ его выражение из (1.74), получаем

$$dv/dt = v \sum_{i=1}^{3n} (\partial Q_i / \partial p_i).$$

Предполагая, что v — бесконечно малый объем dV , и интегрируя по всему рассматриваемому объему, получаем

$$dV/dt = \int \left(\sum_{i=1}^{3n} \partial Q_i / \partial p_i \right) \prod_{j=1}^{3n} dp_j dq_j. \quad (1.75)$$

Для негамильтоновых систем плотность и соответственно объем фазового пространства в окрестности частицы в общем случае не являются сохраняющимися величинами. Если, однако, $\partial Q_i / \partial p_i = 0$, то (1.74) и (1.75) сводятся к привычной записи теоремы Лиувилля:

$$d\tau/dt = 0; \quad dV/dt = 0. \quad (1.76)$$

Рассматривая более общие соотношения, приходим к важному выводу, что плотность и объем в фазовом пространстве могут сохраняться для систем с негамильтоновыми силами при условии, что они не зависят от импульса. Отметим также, что скорее знак $\partial Q_i / \partial p_i$, чем знак Q_i определяет, растет или уменьшается фазовый объем. Различают два случая: системы с $Q_i < 0$, так что

$$\partial Q_i / \partial p_i = -\partial |Q_i| / \partial p_i, \quad (1.77)$$

и системы с $Q_i > 0$. Для систем, передающих энергию окружающей среде, получаем подстановкой (1.77) в (1.75)

$$dV/dt = - \int \left(\sum \partial |Q_i| / \partial p_i \right) \prod_{j=1}^{3n} dp_j dq_j. \quad (1.78)$$

Исследуя знак $\partial |Q_i| / \partial p_i$, можно теперь определить, растет или

уменьшается объем фазового пространства из-за действия негемильтоновых сил, которые уменьшают энергию системы. Двумя предполагаемыми механизмами, уменьшающими фазовый объем, являются *излучение* и *столкновения*. В случае излучения имеем: $\partial|Q_i|/\partial p_i > 0$, действие излучения заключается в уменьшении фазового объема. Для процессов со столкновениями $\partial|Q_i|/\partial p_i < 0$, что ведет к увеличению фазового объема. Хотя эти выводы были сделаны для $6n$ -мерного фазового пространства, они действительны и для приведенного шестимерного фазового пространства, состоящего из трех пространственных измерений и трех канонических импульсов. В этом приведенном фазовом пространстве в отличие от ранее рассмотренного фазового пространства плотность является скорее плотностью действительных частиц, чем плотностью точек, описывающих системы.

Сведение $6n$ -мерного фазового пространства к пространству шести измерений для систем невзаимодействующих частиц. Мы развиваем теорию фазового пространства, чтобы получить информацию о движении группы частиц. Очевидно, что теорема, касающаяся движения точки системы, отображающей совокупное движение всех ее частиц в $6n$ -мерном пространстве, не найдет широкого применения до тех пор, пока она не будет связана с движением индивидуальных частиц. Рассмотрим вопрос о сведении $6n$ -мерного фазового пространства к шестимерному фазовому пространству. Предположим, что взаимодействие между частицами отсутствует, и при этом предположении, интегрируя по координатам и импульсам одной частицы, уменьшим число переменных. Эта техника использовалась, к примеру, Кирвудом [12]. Интеграл от уравнения Лиувилля по координатам одной частицы, которые пробегает значения от 1 до 3, может быть записан следующим образом:

$$\int \left[\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{\partial \tau}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \right] \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j = \\ = \int \tau \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j. \quad (1.79)$$

Шестикратное интегрирование выполняется от $-\infty$ до $+\infty$ для каждой пространственной координаты и импульса частицы. Так как взаимодействие между частицами отсутствует, плотность вероятности всей конфигурации — произведение плотностей вероятности для отдельных частиц в конфигурации и Q_i -функции только их соответствующих q_i и p_i . Для интегрирования выражения (1.79) разобьем распределение плотности на две части, одна из которых — плотность всех частиц, за исключением тех, которые связаны с j -ми координатами, а другая часть связана только с j -ми координатами. Полное распределение плотности:

$$\tau = \tau(p_i, q_i) |_{i \neq j} \tau(p_j, q_j). \quad (1.80)$$

Символ $i \neq j$ означает, что i принимает все значения, за исключением трех j -х, а аргументы p_j, q_j второй части пробегают по трем значениям j . Возьмем одно слагаемое суммы с $i = k$ и проинтегрируем по частям по координате k -частицы

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial \tau}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial \tau}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j = \\ & = - \int \tau \left(\frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} \right) \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j. \end{aligned}$$

Считаем, что на границе области интегрирования распределение плотности равно нулю. Если подставить вместо \dot{p}_k и \dot{q}_k выражения из уравнений Гамильтона, то после сокращений получим следующее выражение:

$$- \int \tau (\partial Q_k / \partial p_k) \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j. \quad (1.80a)$$

Если возьмем член суммы для $i \neq j$, то получим

$$\begin{aligned} & \int \dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j = \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} [\tau(p_i, q_i) |_{i \neq j}] \times \\ & \times \int \tau(p_i, q_i) \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j = \dot{p}_i \frac{\partial \tau(p_i, q_i)}{\partial p_i} \Big|_{i \neq j}. \end{aligned} \quad (1.80b)$$

Аналогичное интегрирование правой части дает члены вида

$$- \int \tau (\partial Q_i / \partial p_i) \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j \quad (i = j) \quad (1.81a)$$

и

$$\begin{aligned} & \tau(p_i, q_i) (\partial Q_i / \partial p_i) \int \tau(p_j, q_j) \prod_{j=k}^{k+2} dp_j dq_j = \\ & = \tau(p_i, q_i) (\partial Q_i / \partial p_i) \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (1.81b)$$

Член (1.80a) сокращается с членом (1.81a), в результате получаем уменьшенное на единицу число измерений. Выполняя интегрирование по трем проекциям координаты j -й частицы, исключаем координату из распределения плотности. Тогда размерность фазового пространства уменьшится на шесть. Повторяя эту процедуру над $(n - 1)$ частицами, сведем нашу систему к системе одной частицы в шестимерном фазовом пространстве. Таким образом, мы записали теорему Лиувилля в фазовом пространстве шести измерений

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \tau}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = - \tau \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q_i}{\partial p_i}, \quad (1.82)$$

где τ — функция шести координат (и, возможно, времени), т. е.

$$\tau = \tau(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, t) \quad (1.83)$$

— вероятность нахождения одной частицы в некоторой точке шестимерного фазового пространства. Так как предполагается, что все частицы идентичны, можно умножить (1.82) на число частиц n , чтобы получить распределение плотности частиц. Если положим $f = n\tau$, то получим выражение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = -f \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q_i}{\partial p_i}, \quad (1.84)$$

которое дает степень изменения плотности в фазовом пространстве со временем. Уравнение (1.84) — уравнение Больцмана для невзаимодействующих частиц, которое мы строго вывели из теоремы Лиувилля. Негамильтоновы члены могут быть вычислены в зависимости от характера участвующих в движении сил, таких, как близкие столкновения с другими сортами частиц, синхротронное или тормозное излучения.

Если правая часть уравнения (1.84) равна нулю, получаем простое соотношение $df/dt = 0$, которое подчеркивает важную особенность движения частиц в фазовом пространстве: группа невзаимодействующих частиц, движущихся под действием гамильтоновых сил, ведет себя как несжимаемая жидкость.

Теорема Лиувилля для 6-мерного фазового пространства с учетом взаимодействия между частицами. Хотя доказать теорему Лиувилля для 6-мерного фазового пространства можно только в случае невзаимодействующих частиц, при наличии взаимодействия между частицами это можно сделать лишь приближенно. Корреляции между частицами обычно очень малы, так что поведение каждой частицы по отношению к данной группе координат тождественно поведению любой другой частицы, т. е. каждая из них испытывает действие со стороны всего коллектива частиц. В пределе бесконечного числа частиц с бесконечно малым зарядом (так что суммарные поля всего коллектива частиц остаются конечными) одночастичная функция распределения описывает поведение системы точно. Это можно пояснить на примере системы заряженных частиц, стремящихся перестроиться так, чтобы остаться нейтральными и экранирующий потенциал которых, как следует из простых рассуждений, должен быть вида

$$(1/r) \exp(-r/\lambda_D), \quad (1.85)$$

где r — расстояние от флуктуации заряда; $\lambda_D = v_T/\omega_p$ — отношение тепловой скорости (соответствующее усреднение по распределению скоростей) к плазменной частоте $\omega_p^2 = e^2 n/m\epsilon_0$. Таким образом, с ростом плотности n дебаевский радиус экранировки λ_D уменьшается и роль индивидуальных флуктуаций стирается.

Были предложены различные доказательства возможности рассмотрения уравнения Лиувилля в фазовом пространстве меньшего числа измерений в пределе бесконечного числа частиц с бесконечно малым зарядом. Ростокер, Розенблют [20] и другие авторы использовали разные методы доказательства, предложенные группой БГКУ (инициалы авторов первоначальных исследований; для более подробного ознакомления см. работы [8] и [9]). Независимое доказательство было предложено Милсом и Сесслером [17]. Преимущество БГКУ-подхода состоит в том, что можно определить поправки более высокого порядка. Предполагая сначала предельный случай усредненного заряда, корреляции могут быть введены через негамильтоновы столкновительные члены, что постулировалось Больцманом [5]. В этом случае член в правой части выражения (1.84) заменяется членом, учитывающим столкновения, так что (1.84) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial f}{\partial t} \Bigg|_{\text{столкновения}} \quad (1.86)$$

Здесь \dot{p}_i учитывает силу, действующую на частицу со стороны остальных частиц коллектива.

Хотя БГКУ-подход уводит довольно далеко от главного направления этой книги, обрисует здесь в общих чертах метод и основные результаты, которые будут использованы в последующем изложении; силы, вызванные пространственным зарядом, включим в гамильтоновы силы $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$. Сначала введем слегка измененные обозначения, которые облегчат изложение. Будем использовать векторные обозначения \mathbf{q}_i и \mathbf{p}_i , так что индекс в этом случае обозначает частицу, а однократное интегрирование означает интегрирование по трем степеням свободы этой частицы. Рассмотрим силы вида

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left[e\varphi_i(\mathbf{q}_i, t) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \right], \quad (1.87)$$

где первый член представляет собой внешние силы, т. е. это зависящий от времени градиент потенциала, а в качестве второго члена возьмем для простоты кулоновский потенциал. Магнитные силы не учитываются, они могут быть рассмотрены аналогичным образом. Ранее мы предполагали, что многочастичная функция распределения является произведением одночастичных функций распределения, что позволило последовательно провести интегрирование по координатам каждой частицы. При наличии кулоновского взаимодействия, оказывающего влияние на движение частиц, нельзя больше а priori предполагать такую независимость. Поэтому определим s -частичную функцию распределения в системе, состоящей из n частиц:

$$\tau^{(s)} = \int \tau^{(n)} \prod_{j=s+1}^n dp_j dq_j. \quad (1.88)$$

Эту функцию можно интерпретировать следующим образом:

$$\tau^{(s)} \prod_{i=1}^s dp_i dq_i, \quad (1.89)$$

что является вероятностью частицы иметь координаты в интервале от q_i до $q_i + dq_i$ и импульс в интервале от p_i до $p_i + dp_i$ и так для всех частиц от первой до s -й. Выражение (1.89) полностью аналогично определенному ранее распределению вероятности $\tau = \tau^{(n)}$.

Теперь проинтегрируем уравнение Лиувилля [уравнение (1.74) с $\partial Q_i / \partial q_i = 0$] по частицам от $(s+1)$ до n , после небольшой перегруппировки членов получим уравнение в векторных обозначениях для s -частичной функции распределения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^{(s)}}{\partial t} = & \sum_{i=1}^s \left(\dot{q}_i \frac{\partial \tau^{(s)}}{\partial q_i} - e \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \tau^{(s)}}{\partial p_i} \right) - \\ & - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^s \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{|q_i - q_j|} \right) \frac{\partial \tau^{(s)}}{\partial p_i} - \\ & - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^s \int \sum_{j=s+1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{|q_i - q_j|} \right) \frac{\partial \tau^{(n)}}{\partial p_i} \prod_{j=s+1}^n dq_j dp_j = 0. \quad (1.90) \end{aligned}$$

Уменьшение размерности фазового пространства в этом случае во всех членах, кроме последнего, было выполнено аналогично предыдущему пункту. Можно уменьшить размерность (1.90), используя то свойство, что $\tau^{(n)}$ симметрична по отношению к перестановке индексов любых двух частиц. Это означает, что корреляции частиц, описываемых s -частичной функцией распределения с любыми $n - s$ -частицами, которые не описываются s -частичной функцией распределения, те же самые. На основании этого считаем, что интегралы по координатам частиц j (j пробегает значения от $s+1$ до n) идентичны и суммарная сила равна $(n - s)$ -кратной силе одной частицы. Последний член в (1.90) тогда принимает вид

$$(n-s) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^s \int \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{|q_i - q_{s+1}|} \right) \frac{\partial \tau^{(s+1)}}{\partial p_i} dp_{s+1} dq_{s+1}. \quad (1.91)$$

Здесь проведено интегрирование по $(s+2) - (n)$ -координатам частиц, которых нет в выражении для силы. Мы выразили s -частичную функцию распределения через $(s+1)$ -частичную функцию распределения. Поэтому имеем цепочку таких уравнений, начиная с одночастичной функции распределения, выраженной через двухчастичную функцию распределения:

$$\frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial t} + \dot{q}_1 \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial q_1} - e \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - (n-1) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{|q_1 - q_2|} \right) \frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial p_1} dp_2 dq_2. \quad (1.92)$$

Последнее уравнение этой цепочки — уравнение Лиувилля. К сожалению, нельзя, решив первое уравнение, найти зависимость $\tau^{(1)}$ от времени до тех пор, пока не известно $\tau^{(2)}$, которое, в свою очередь, находят из последующего уравнения цепочки, и т. д. до последнего уравнения цепочки. Нужен метод, который бы давал возможность обрывать на некотором шаге эту цепочку. К примеру, если $e^2 = 0$, то последний член в (1.45) равен нулю, и можно сразу прийти к уравнению Лиувилля в шестимерном пространстве.

Процедура, с помощью которой можно будет отделить одночастичную функцию распределения от многочастичной, заключается в том, чтобы найти такой параметр малости, который позволит разорвать цепочку уравнений и затем разложить эту функцию распределения в ряд по степеням этого малого параметра, так что низшая степень разложения соответствует расщепленным функциям распределения. Процедура разложения по малому параметру будет неоднократно использована в книге, поэтому она подробно рассмотрена ниже. Здесь же отметим, что если увеличивать до бесконечности число частиц, но оставить $e^2 n$ постоянным, то четвертый член в (1.90) исчезает, в то время как пятый член (1.91) остается конечным. На первый взгляд кажется, что это мало даст, так как уравнения зацепляются через пятый член. Отметим, однако, что эта процедура физически означает, что эффекты, вызванные столкновениями индивидуальных частиц, становятся незначительными, в то время как силы взаимодействия между частицами представимы в виде интеграла по функции распределения. Поэтому можно ожидать, что с точностью до первого члена в разложении некоторой величины, связанной с $e^2 n$, $(s + 1)$ -частичная функция распределения может быть разбита на произведение s -частичной функции распределения и одночастичной функции распределения, которая описывает все другие частицы, каждая из которых идентична с $(s + 1)$ -частицей. Явный вид параметра разложения сейчас не важен, но, для того чтобы быть последовательными, нужно выбрать некоторый масштаб времени и длины, по которым будет проводиться разложение. Можно показать, что если нормировать время на $1/\omega_p$ и расстояние на λ_D , то первые три члена и пятый член — нулевого порядка, а четвертый член — первого порядка малости при разложении в ряд по безразмерному параметру $1/\alpha$:

$$\alpha = n\lambda_D^3,$$

где n равно плотности частиц и, таким образом, α — число частиц в дебаевской сфере. Проводя разложение $\tau^{(s)}$ в ряд по степеням параметра $1/\alpha$

$$\tau^{(s)} = \tau_0^{(s)} + (1/\alpha) \tau_1^{(s)} + \dots \quad (1.93)$$

и затем предполагая, что функция распределения нулевого порядка равна произведению одночастичных функций распределения

$$\tau_0^{(s)} = \prod_{i=1}^s \tau_0(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i); \quad (1.94)$$

$$\tau_0^{(s+1)} = \tau_0^{(s)} \tau_0,$$

получаем (1.90) с точностью до членов первого порядка разложения:

$$\frac{\partial \tau_0^{(s)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left(\mathbf{q}_i \frac{\partial \tau_0^{(s)}}{\partial \mathbf{q}_i} - e \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{\partial \tau_0^{(s)}}{\partial \mathbf{p}_i} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^s \frac{\partial \tau_0^{(s)}}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{ne^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{1}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{s+1}|} \tau_0(\mathbf{q}_{s+1}, \mathbf{p}_{s+1}) d\mathbf{p}_{s+1} d\mathbf{q}_{s+1} = 0, \quad (1.95)$$

где подставлено n вместо $(n - s)$, так как $n \gg s$, и исключен из интеграла фактор $\tau^{(s)}$. Положим, что $n=1$ для одночастичной функции распределения, тогда (1.95) примет вид

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial t} + \mathbf{q}_1 \frac{\partial \tau_0}{\partial \mathbf{q}_1} - e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \frac{\partial \tau_0}{\partial \mathbf{p}_1} = 0, \quad (1.96)$$

где

$$\varphi_{12} = \frac{ne}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|} \tau_0(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 \quad (1.97)$$

— усредненное по всем частицам поле. Выражение (1.96) — записанная в шестимерном фазовом пространстве теорема Лиувилля, где

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = -e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathbf{q}_1} \right)$$

— сила, включающая градиент усредненного потенциала. Это уравнение известно как бесстолкновительное уравнение Больцмана или уравнение Власова.

Хотя вывод выражения (1.96) показывает, что силы пространственного заряда могут быть включены в теорему Лиувилля, для полноты картины дадим метод, с помощью которого можно получить эффекты более высокого порядка, обусловленные столкновениями отдельных частиц, включая корреляции между ними. Процедура состоит в том, чтобы использовать разложение, в котором мы предполагаем, что функции распределения могут быть записаны в виде

$$\tau^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \tau(\mathbf{x}_1) \tau(\mathbf{x}_2) + P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2);$$

$$\tau^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \tau(\mathbf{x}_1) \tau(\mathbf{x}_2) \tau(\mathbf{x}_3) + \tau(\mathbf{x}_1) P(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) +$$

$$+ \tau(\mathbf{x}_2) P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) + \tau(\mathbf{x}_3) P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$$

и т. д. до $\tau^{(n)}$, где мы использовали для краткости обозначение $\mathbf{x} = \mathbf{p}, \mathbf{q}$. Ясно, что формально можно использовать такое разложение, но практически им можно воспользоваться только в том случае, если P и T малые величины. На языке предыдущего разложе-

ния предположим, что $P = O(1/\alpha)$ и $T = O(1/\alpha^2)$, так что с точностью до первого порядка по $1/\alpha$

$$\tau^{(2)}(x_1, x_2) = \left[\tau_0(x_1) + \frac{1}{\alpha} \tau_1(x_1) \right] \left[\tau_0(x_2) + \frac{1}{\alpha} \tau_1(x_2) \right] + P(x_1, x_2),$$

и так как

$$\tau^{(2)}(x_1, x_2) = \tau_0^{(2)}(x_1, x_2) + \frac{1}{\alpha} \tau_1^{(2)}(x_1, x_2),$$

то получаем член первого порядка малости

$$\tau_1^{(2)}(x_1, x_2) = \tau_0(x_1) \tau_1(x_2) + \tau_0(x_2) \tau_1(x_1) + \alpha P(x_1, x_2),$$

где $P(x_1, x_2)$ — двухчастичная функция распределения. Получаем замкнутую систему в отношении τ_0 , τ_1 и P , переходя ко второму члену в цепочке уравнений, описывающих эволюцию двухчастичной функции распределения, которая затем замыкается по первому порядку по $1/\alpha$.

§ 1.4. Теория колебаний

Введение. Большинство вопросов, с которыми сталкиваются, рассматривая движение частиц с точки зрения фазового пространства, связано с колебательными системами. Кроме того, одно из преимуществ этого подхода — возможность получить значительную информацию о движении частиц, не решая полностью уравнений движения. Получение частных решений является большим достижением, так как уравнения движения в общем случае не линейны и не могут быть решены аналитически. Поэтому есть надежда обнаружить значительное сходство между методами фазового пространства и методами, используемыми для получения как частных решений, так и приближенных решений уравнений, описывающих нелинейные колебания. Само понятие фазовой плоскости сыграло важную роль при изучении нелинейных колебаний. В самом деле, именно Пуанкаре (1892 г.) при изучении небесной механики развил теорию устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений. В этом параграфе кратко излагаются некоторые понятия и методы теории нелинейных колебаний и сделана попытка показать, как они могут быть описаны с точки зрения теории фазового пространства. Не будем пытаться дать здесь полное освещение этого вопроса. Для более глубокого изучения предмета и более полной библиографии мы отсылаем читателя к работам [2, 18, 21]. Материал данного параграфа в значительной степени заимствован из этих работ.

Консервативные автономные системы. Нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{1.98}$$

описывает автономные (не содержащие явно независимую переменную), консервативные (не содержащие первой производной) колеба-

ния. Как обычно, точка означает производную по времени. Вводя переменную $v = \dot{x}$, получаем $\ddot{x} = v(dv/dx)$, подставляя ее в (4.1), имеем уравнение

$$v \frac{dv}{dx} + f(x) = 0,$$

которое сразу же разделяется. Интегрируя, получаем

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = - \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (1.99)$$

Уравнение (1.99) идентично по форме выражению (1.6), приводящему к интегралу энергии для осциллятора с не зависящим от времени гамильтонианом. Как мы уже видели, в случае гамильтоновой системы одномерный консервативный осциллятор легко сводится к квадратурам при решении уравнения относительно t :

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\left(v_0^2 - 2 \int_{x_0}^x f(x) dx\right)^{1/2}}, \quad (1.100)$$

где v выражено из соотношения (1.99). Интегрируя по замкнутой кривой, убеждаемся в том, что период $(t - t_0)$ зависит от начальных условий. Таким образом, частота колебаний зависит от амплитуды колебаний.

Линейная неавтономная система. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g(t), \quad (1.101)$$

где вынуждающая сила $g(t)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\omega$; его решение состоит из решения однородного уравнения вида

$$x_h = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (1.102)$$

и частного решения. Разлагая $g(t)$ в ряд Фурье, получаем

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (1.103)$$

Подставляя это выражение в (1.101) и полагая, что x имеет тот же вид, что и $g(t)$, и приравнявая соответствующие члены, получаем для n -го члена

$$-n^2 \omega^2 x_{pn} + \omega_0^2 x_{pn} = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

или

$$x_{pn} = \frac{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}.$$

Суммируя по n и добавляя решение однородного уравнения; получаем

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}. \quad (1.104)$$

Из выражения (1.104) видно, что всякий раз, когда $\omega_0^2 = n^2 \omega^2$, возникает резонанс, ведущий к раскачке колебаний. Из предыдущего пункта видно, что частота нелинейных колебаний — функция амплитуды колебаний. Таким образом, резонанс зависит от амплитуды колебаний; решение будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от отношения амплитуды вынуждающей силы к амплитуде нелинейных членов уравнения. Также получаем, что неустойчивые линейные колебания могут расти до устойчивых амплитуд в нелинейном режиме.

Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Более общий тип неавтономных систем — системы, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка с периодическими коэффициентами.

Исследуем дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + f(t) \dot{x} + g(t) x = 0. \quad (1.105)$$

Здесь $f(t)$ и $g(t)$ считаются сейчас произвольными известными функциями t . Так как рассматриваемое уравнение (1.105) второго порядка и линейно, общее решение может быть сконструировано в виде суммы двух линейно независимых решений x_1 и x_2 . При исследовании определителя Вронского может быть найдено важное свойство этого уравнения

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}. \quad (1.106)$$

Дифференцируя обе части по времени, получаем

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}, \quad (1.107)$$

где второй член равен нулю в силу равенства двух строк определителя. Подставляя вместо \dot{x}_1 и \dot{x}_2 выражения из (1.105), имеем $\dot{W} = -x_1(f\dot{x}_2 + g x_2) + x_2(f\dot{x}_1 + g x_1)$. После сокращения остается $\dot{W} = -fW$. Это соотношение можно проинтегрировать:

$$W(t) = W_0 \exp \left[- \int_0^t f(t) dt \right]. \quad (1.108)$$

Из выражения (1.108) видно, что для консервативных систем, удовлетворяющих уравнению

$$\ddot{x} + g(t)x = 0, \quad (1.109)$$

т. е. $f(t) = 0$, имеем

$$W = \text{const.} \quad (1.110)$$

Уравнение (1.110) остается в силе независимо от того, является ли $g(t)$ периодической функцией или нет.

Решение любого дифференциального уравнения второго порядка независимо от того, является ли оно периодическим или нет, однозначно определяется начальными значениями функции, найденной из решения уравнения, и ее производными. Таким образом, для каждого из двух независимых решений можно написать преобразование от начального момента времени $t = 0$ к любому другому моменту времени:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= m_{11} x_1(0) + m_{12} \dot{x}_1(0); \\ \dot{x}_1(t) &= m_{21} x_1(0) + m_{22} \dot{x}_1(0), \end{aligned}$$

где коэффициенты m_{ih} зависят от времени, но не зависят от начальных координат. Следствием условия (1.110) является тот факт, что определитель, составленный из коэффициентов m_{ih} , равен единице:

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = 1. \quad (1.111)$$

В этом можно убедиться, записав матрицу преобразования для двух решений следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) & \dot{x}_2(0) \end{vmatrix}.$$

Рассматривая определитель этих матриц и пользуясь тем, что определитель двух матриц равен произведению определителей этих матриц, получаем преобразование определителя Вронского: $W(t) = |M| W(0)$, и так как $W(t) = W(0) \quad |M| = 1$.

Если теперь принять, что в дифференциальном уравнении $g(t + \tau) = g(t)$, то получим уравнение Хилла, решение которого удовлетворяет следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned} x_1(t + \tau) &= ax_1(t) + bx_1(t); \\ \dot{x}_1(t + \tau) &= cx_1(t) + d\dot{x}_1(t), \end{aligned}$$

из которых сразу получаем [см. (1.111)], что

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1. \quad (1.112)$$

Если теперь принять, что x_1 и \dot{x}_1 — собственные функции линейной системы, т. е. те решения, для которых

$$[\alpha] \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad (1.113)$$

где x_1, \dot{x}_1 написаны как вектор \mathbf{x} и коэффициенты в матричной форме

$$[\alpha] = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

то видно, что собственные значения должны быть корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - N\lambda + 1 = 0, \quad (1.114)$$

где третий член в (1.114) $ad - bc = 1$, как следует из (1.112); N — след матрицы, $N = a + d$. Решение для λ следующее:

$$\lambda_{1,2} = (N/2) \pm i[1 - (N/2)^2]^{1/2}.$$

Видим, что $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2$ равняется действительному числу, решение можно также записать в следующем виде:

$$\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\sigma), \quad (1.115)$$

если положить

$$N = 2 \cos \sigma. \quad (1.116)$$

Поэтому решения устойчивы, если абсолютная величина следа

$$\|N\| < 2. \quad (1.117)$$

То, что собственные функции имеют вид (1.115) с действительными σ для колебательных решений (устойчивых), эквивалентно постоянству площади фазового пространства, ограниченной траекторией осциллятора. Это исследовано в гл. 3 и 4.

Уравнение Хилла с функцией $g(t)$ в виде

$$g(t) = \omega_0^2 + \mu \cos t$$

используется во многих приложениях. Функция $g(t)$, будучи подставлена в (1.109), дает уравнение Матье:

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + \mu \cos t)x = 0. \quad (1.118)$$

На рис. 1.8 показаны решения уравнения, полученные разложением в ряд, которые определяют области устойчивости (заштрихованы). Рассмотрим три отдельные области. Для $\omega_0^2 > 0$ (устойчивые решения в отсутствие неавтономного члена) и $\mu < \omega_0^2$ решения в основном устойчивы с областями неустойчивостей резонансного типа.

Для $\mu > \omega_0^2$ решения в основном неустойчивы с узкими полосами устойчивости. Для $\omega_0^2 < 0$ и $\mu < \omega_0$ решения всегда неустойчивы. Эти результаты согласуются с предыдущими выводами, касающимися нелинейных автономных систем. Далее будет показано, что исследование на устойчивость слабо нелинейных уравнений может быть сведено к известным характеристикам устойчивости уравнения Матье.

Теория периодических систем может быть применена к широкому кругу вопросов. С некоторыми приложениями, касающимися движения частиц, познакомимся далее при рассмотрении периодически

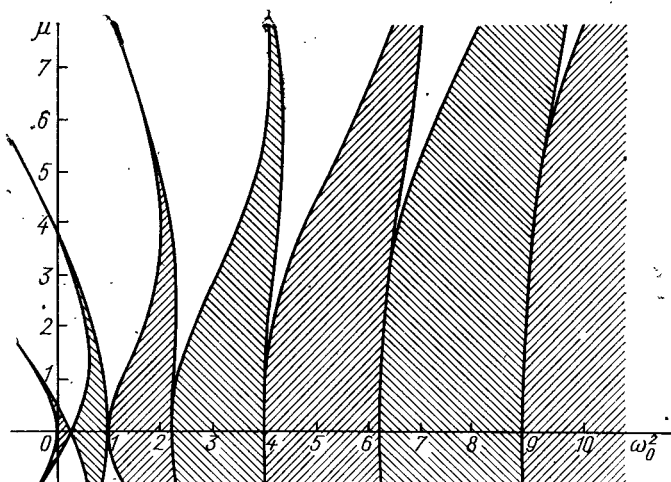


Рис. 1.8. Области устойчивости (заштрихованные) для уравнения Матье.

фокусируемых пучков и в связи с изучением ускорителей со знакопеременным полем. Основные уравнения также могут быть применены к теории распространения волн в периодических структурах. Подробно это рассмотрено Бриллюэном [7].

Решение автономных уравнений со слабой нелинейностью методом возмущений. Рассмотрим слабо нелинейное уравнение вида

$$\ddot{x} + \bar{\omega}_0^2 x = \varepsilon g(x, \dot{x}), \quad (1.119)$$

которое, как предполагается, имеет периодические решения. Величина ε может быть действительным маленьким числом, на которое умножается нелинейный член, или, наоборот, если сама функция g мала, она может задавать процедуру разложения, т. е. она вводится произвольно и сводит задачу к линейной в случае $\varepsilon \rightarrow 0$, в случае же $\varepsilon \rightarrow 1$ возвращаемся к нашей задаче. В выражении

(1.119) удобно провести замену переменных через $\theta = \omega t$, тогда выражение (1.119) примет следующий вид:

$$\omega^2 x'' + \bar{\omega}_0^2 x = \varepsilon g(x, \omega x'), \quad (1.120)$$

где штрих означает дифференцирование по θ . Замена переменных упрощает выбор периодичности, и, фиксируя произвольные начальные координаты, получаем

$$\left. \begin{aligned} x(\theta + 2\pi) &= x(\theta); \\ x(0) &= A; \\ x'(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.121)$$

Считаем, что ω и x зависят от амплитуды A и от ε . Так как ε мало, попытаемся найти решение в виде степенного ряда по ε :

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots; \\ x(\theta) &= x_0(\theta) + \varepsilon x_1(\theta) + \varepsilon^2 x_2(\theta) + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (1.122)$$

подставляя решения в (1.120), приравниваем члены при соответствующих степенях ε и получаем последовательно поправки более высокого порядка к x и ω . Проиллюстрируем эту процедуру на примере слегка нелинейной пружины:

$$\omega^2 x'' + \bar{\omega}_0^2 x + \varepsilon \gamma x^3 = 0. \quad (1.123)$$

Фактор γ введен для размерности и может быть взят как положительным, так и отрицательным.

Подставляя (1.122) в (1.123), имеем выражение

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1 + \dots) (x_0'' + \varepsilon x_1'' + \dots) + \bar{\omega}_0^2 (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + \\ + \varepsilon \gamma (x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 + \dots) = 0, \end{aligned} \quad (1.124)$$

которое для членов нулевого порядка по ε дает $\omega_0^2 x_0'' + \bar{\omega}_0^2 x_0 = 0$. Это уравнение с учетом начальных условий (1.121) имеет решение

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \cos \theta; \\ \omega_0 &= \bar{\omega}_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.125)$$

Как и ожидалось, это есть решение линейной задачи ($\varepsilon = 0$). Члены первого порядка по ε дают

$$\omega_0^2 x_1'' + \bar{\omega}_0^2 x_1 + 2\omega_0 \omega_1 x_0'' + \gamma x_0^3 = 0, \quad (1.126)$$

подставляя решения нулевого порядка (1.125) в (1.126), получаем

$$\omega_0^2 x_1'' + \bar{\omega}_0^2 x_1 = \left(2\omega_0 \omega_1 - \frac{3\gamma}{4} A^2 \right) A \cos \theta - \frac{\gamma}{4} A^3 \cos 3\theta. \quad (1.127)$$

Периодичность x требует, чтобы коэффициент вынуждающей силы при $\cos \theta$ был равен нулю, ибо иначе будет резонанс [см. (1.104)]!

который приведет к линейному росту секулярных членов с увеличением $\theta = \omega t$. Это требование дает сдвиг по частоте

$$\varepsilon\omega_1 = \varepsilon \frac{3}{8} \gamma \frac{A^2}{\omega_0} \quad (1.128)$$

и выражение для x_1 принимает вид

$$x_1 = A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta - \frac{\gamma A^3}{4\omega_0^2 (1-3^2)} \cos 3\theta.$$

Вводя начальные условия для x_1

$$x_1(0) = x_1'(0) = 0,$$

получаем выражение

$$\varepsilon x_1 = \varepsilon \frac{A^3 \gamma}{32\omega_0^2} (-\cos \theta + \cos 3\theta), \quad (1.129)$$

которое дает сдвиг по x , обусловленный нелинейностью. Эта процедура может быть продолжена для более высоких порядков разложения по ε . Отметим здесь, что если бы мы предположили, что только x меняется с возмущенной амплитудой, в то время как величина ω остается фиксированной, то резонансный член в (1.127) исключить нельзя. Таким образом, разложение как по амплитуде, так и по частоте необходимо, чтобы получить решения более высокого порядка.

Мы не рассмотрели двух вопросов, связанных с этим типом разложения, а именно: устойчивость колебаний в присутствии возмущений и сходимости разложения к действительному решению. Первый вопрос может быть рассмотрен без труда, как только будет найдено решение. Если затем изучить линеаризованное уравнение в окрестности данного решения и найти, что оно устойчиво, то это означает, что нелинейность не нарушает устойчивости в этой окрестности. Чтобы избежать решения нелинейного уравнения, а только исследовать устойчивость решения для маленьких нелинейных членов, можно исследовать различие для линейных и нелинейных уравнений. Для нелинейной пружины (1.123), подставляя $x + \delta x$ вместо x и предполагая, что δx мало, отбрасывая члены порядка $(\delta x)^2$ и выше, получаем

$$\omega^2 \delta x'' + (\omega_0^2 + 3\varepsilon \gamma x^2) \delta x = 0. \quad (1.130)$$

Рассматривая решения около линейного решения, берем x и ω из (1.125) и получаем

$$\delta x'' + \left[1 + \frac{3\varepsilon \gamma A^2}{2\omega_0^2} + \frac{3\varepsilon \gamma A^2}{2\omega_0^2} \cos 2\theta \right] \delta x = 0, \quad (1.131)$$

где мы разложили $\cos^2 \theta$ по формуле двойного угла. Видим, что после элементарных преобразований переменных уравнение (1.131) иден-

точно уравнению Матье (1.118), и, таким образом, проблема устойчивости нелинейного уравнения сведена к известной диаграмме устойчивости решений уравнения Матье (см. рис. 1.8).

Асимптотическое разложение. Процедура вычисления приближений следующих порядков малости для нелинейного уравнения или для уравнения с зависящими от времени коэффициентами, как отмечалось ранее, не обязательно сходится. Действительно, Пуанкаре [19] показал, что метод, с помощью которого удаляются резонансные члены, часто приводит к тому, что ряды не сходятся к решениям. Несмотря на это, ряды могут все же сходиться асимптотически (не абсолютно) в том смысле, что если положить $\varepsilon = 1/T$, скажем, в (1.119) и записать выражение для $x(\theta)$, как в (1.22)

$$x = x_0 + \frac{x_1}{T} + \frac{x_2}{T^2} + \dots, \quad (1.132)$$

то, рассматривая $S_n(T)$ как частичную сумму n членов выражения (1.132), говорят, что разложение сходится асимптотически, если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^n [x(\theta, T) - S_n(\theta, T)] = 0 \quad (1.133)$$

для любого n и θ , где как n , так и θ предполагаются фиксированными. Замена переменных сама по себе не играет роли и для большинства проблем, связанных с отысканием решений с помощью метода возмущений, сходимость нас не интересует по той причине, что функции обычно аппроксимируются несколькими членами разложения. Однако если можно показать, что ряды сходятся асимптотически, то из вида выражения (1.133) ясно, что для больших T сходимость быстрая. Следовало бы также указать, что если $x(\theta, T) = e^{-T}$, то $S_n(\theta, T) = 0$, так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^n e^{-T} = 0 \quad (1.134)$$

для всех n . Таким образом, функция может быть асимптотически равной нулю и одновременно вести себя как экспонента с параметром T .

Асимптотическая формула особенно полезна, когда встречаются функции, медленно меняющиеся со временем. Этот метод имеет длинную предысторию в связи с изучением гармонического осциллятора с переменной частотой, берущую свое начало от метода фазового интеграла Лиувилля [16] и Грина [11], метод развит позднее Вентцелем [22], Крамерсом [13] и Бриллюэном [6] при построении квантовой механики и известный в последнем виде как ВКБ-приближение. Если для гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t) x = 0$$

считать, что $\omega_0^2(t)$ — медленно меняющаяся величина, то, проведя замену переменных $\tau = t/T$, имеем

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + T^2\omega_0^2(\tau)x = 0, \quad (1.135)$$

где T теперь считается большим числом, определяющим масштаб времени, в течение которого происходит значительное изменение ω_0^2 , т. е.

$$\frac{1}{T} = O\left[\frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0}\right]. \quad (1.136)$$

Согласно методу ВКБ или методу фазового интеграла, в (1.135) нужно сначала провести замену

$$x = \exp\left(\int y d\tau\right), \quad (1.137)$$

так что, записав $dx/d\tau$ как $x' = yx$ и $x'' = y^2x + y'x$, которое после подстановки в (1.135) дает уравнение Рикатти:

$$y^2 + y' + T^2\omega_0^2 = 0. \quad (1.138)$$

Если теперь слегка изменим члены разложения таким образом, что основной член будет линеен по T

$$y = Ty_0 + y_1 + T^{-1}y_2 + \dots, \quad (1.139)$$

и подставим разложение в (1.138), получим для самой высокой степени разложения по T

$$y_0 = j\omega_0 \quad (1.140)$$

и для следующего порядка по T

$$2y_0y_1 + y_0' = 0. \quad (1.141)$$

Подставляя (1.139) и (1.141) в (1.137), получаем выражение

$$\bar{x} = \exp\left[\int (Ty_0 + y_1) d\tau\right] = \exp\left[\int \left(Ty_0 - \frac{1}{2}y_0'/y_0\right) d\tau\right],$$

которое после интегрирования второго члена и подстановки выражения для y_0 из (1.140) дает ВКБ-решение:

$$\bar{x} = A \frac{1}{\omega_0^{1/2}} \exp\left[j \int T\omega_0 d\tau\right]. \quad (1.142)$$

Можно строго доказать [3], что \bar{x} является асимптотой к x . В несколько измененной форме воспользуемся этой процедурой в гл. 2, чтобы определить адиабатическую вариацию интеграла действия. Там этот процесс рассмотрен до более высоких степеней разложения и с использованием более удобного метода, используемого Кулсрудом [15] для линейных систем и Крускалом и другими (см. ссылки к гл. 2) для более общих систем.

Метод усреднения. Теперь покажем, что если система обладает изменяющейся фазой, связанной с одной степенью свободы, причем

изменение фазы происходит намного быстрее изменений во времени всех других величин, то первоначальная система может быть преобразована к укороченной системе, в которой изменения фазы усреднены. Этот метод, развитый Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [14], а позднее изложенный подробнее Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским [4], очень сходен с методом определения адиабатических инвариантов в системе со многими степенями свободы, о чем речь пойдет в гл. 2.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_i &= \varepsilon Y(y_1, \dots, y_n, \eta); \\ \dot{\eta} &= \omega(y_1, \dots, y_n) + \varepsilon A(y_1, \dots, y_n, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (1.143)$$

где ε — параметр малости. Выражение (1.143) описывает систему с быстро меняющейся фазой. В случае $\varepsilon = 0$ меняется только фаза, причем с постоянной скоростью ω . Для простоты записываем (1.143) в векторной форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \varepsilon Y(\mathbf{y}, \eta); \\ \dot{\eta} &= \omega(\mathbf{y}) + \varepsilon A(\mathbf{y}, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (1.144)$$

и, раскладывая \mathbf{y} и η по степеням ε

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{y}_0 + \varepsilon \mathbf{y}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{y}_2 + \dots; \\ \eta &= \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.145)$$

получаем для нулевого порядка разложения по ε уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_0 &= 0; \\ \dot{\eta}_0 &= \omega(\mathbf{y}_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.146)$$

Для этого порядка разложения \mathbf{y}_0 можно рассматривать как константу движения, а $\eta_0 = \omega t$ — как соответствующую угловую переменную, что аналогично гамильтоновой системе с одной степенью свободы, записанной в переменных угол — действие. Однако у в действительности представляет систему с n степенями свободы, которая для более высоких степеней разложения меняется со временем. Чтобы исследовать эту зависимость, связанную с членами более высокого порядка разложения, произведем замену переменных:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \int_0^t \dot{\mathbf{y}} dt - \int_0^t \langle \dot{\mathbf{y}} \rangle dt, \quad (1.147)$$

где $\langle \dot{\mathbf{y}} \rangle$ — усредненное за период значение $\dot{\mathbf{y}}(t)$, т. е. флуктуации, возникающие из-за быстро меняющейся фазы, усредняются. Среднее значение вычитается, так что \mathbf{z} находится в окрестности \mathbf{y} в течение продолжительных периодов времени. Это избавляет разло-

жение от секулярных членов, которые растут со временем. После подстановки y из (1.144) в (1.147) получаем

$$y = z + \varepsilon \int_0^t Y(y, \eta) dt - \varepsilon \int_0^t \langle Y(y) \rangle dt, \quad (1.148)$$

где $\langle Y \rangle$, как видно, не зависит от η , так как η — усредненная переменная. Для того чтобы получить значения z приближение за приближением, подставим разложение y и η в преобразование (1.148) и решим уравнение для каждого порядка малости. Так как члены в интегралах умножаются на ε , нужно найти подынтегральные функции с точностью на порядок меньше той, с которой мы хотим получить z . Это позволяет продолжить вычисления итерациями. С точностью до второго порядка по ε (1.148) принимает вид

$$y = z + \varepsilon \int_0^t Y(y_0, \omega t) dt - \varepsilon \int_0^t \langle Y(y_0) \rangle dt, \quad (1.149)$$

дифференцируя его по времени и подставляя выражение для y из (1.144), получаем:

$$\varepsilon Y(y_0, \omega t) = \dot{z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t Y(y_0, \omega t) dt - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \langle Y(y_0) \rangle dt, \quad (1.150)$$

где полные производные по времени от правой части могут быть записаны как частные. Первый член слева уничтожается со вторым членом справа и, выполняя дифференцирование в третьем члене справа, приходим к выражению

$$\dot{z} = \varepsilon Y(y_0) + O(\varepsilon^2), \quad (1.151)$$

которое дает уравнение движения для z с точностью до второго порядка малости, зависящее только от значения константы движения y_0 (нулевого члена разложения). Быстрые осцилляции по фазе усредняются. Вычисления до более высокого порядка по ε с использованием этой процедуры становятся утомительными. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский выполнили вычисления до следующего порядка малости по ε . Усредненные переменные были определены несколько иначе, а именно были выбраны интегралы в (1.147) так, что при $t = 0$ $y(0) = z(0)$. Учитывая эти различия, результаты нашего метода усреднения идентичны до первого порядка малости методу Крускала определения адиабатического инварианта системы, которая периодична в нулевом порядке разложения по параметру малости. Метод Крускала разобран в § 2.4. Детальный пример метода усреднения дан в приложении к гл. 5.

§ 2.1. Адиабатическая инвариантность

Введение. Если систему с одной степенью свободы можно записать в канонической форме, то в случае, когда гамильтониан постоянен, существует также и второй интеграл движения; это дает полное решение динамической задачи. Для осцилляторных систем запись уравнения в переменных угол — действие позволяет выявить эти два интеграла.

Однако для систем с более чем одной степенью свободы интеграл движения, связанный с интегральными инвариантами, существует. Дополнительный интеграл полезен при описании движения только тогда, когда имеется по крайней мере одна степень свободы, которая является разделимой, т. е. она зависит явно только от одной пространственной координаты. В этом случае движение, соответствующее этой степени свободы, можно отделить от остального движения и можно найти инвариантную фазовую площадь для колебаний в этой фазовой плоскости. Каждая новая координата, которую можно отделить, дает добавочный постоянный интеграл действия. Условие разделимости эквивалентно существованию такого преобразования системы координат, чтобы пространственные координаты гамильтониана стали циклическими (не содержались). Соответствующий канонический импульс постоянен и является переменной действия для этой степени свободы. В механике небесных тел интеграл движения такого вида называется также изолирующим интегралом; так как он отделяет одну степень свободы от других. Эти положения проиллюстрированы на примере в § 2.4.

Если гамильтониан системы с одной степенью свободы изменяется, то фазовые траектории не будут замкнутыми, т. е. интеграл действия не определяется. Однако уже показано, что фазовая площадь, первоначально ограниченная некоторым гамильтонианом, есть инвариант (это следствие теоремы Лиувилля). Так, пусть мы рассматриваем систему, которая в начале и в конце имеет постоянные гамильтонианы. Если мы покажем, что все частицы, движущиеся до изменения гамильтониана по данной кривой постоянного гамильтониана, после его изменения также лежат на кривой постоянного гамильтониана, то фазовая площадь, ограниченная кривой постоянного гамильтониана, должна быть равна первоначальной площади. Далее можно ожидать, что для медленных по сравнению с периодом

колебаний изменений параметров начальная фаза колебаний не может быть существенной при формировании конечного состояния частицы. Таким образом, можно ожидать, что для достаточно медленных изменений параметров интеграл действия, вычисленный по полному периоду, будет приближенным интегралом движения, который назовем *адиабатическим интегралом*. Доказательство адиабатического свойства интеграла действия для системы с одной степенью свободы дано ниже.

Прежде чем дать доказательство, следует отметить также, что адиабатическое постоянство фазовой площади, ограниченной гамильтонианом системы с одной степенью свободы, также имеет место и в случае систем со многими степенями свободы с сильно различающимися периодами колебаний. В таких системах исследование движения с самым быстрым периодом возможно после рассмотрения всех других движений, соответствующих медленно изменяющимся частям гамильтониана для одной степени свободы, т. е. фактически после разделения гамильтониана по этой переменной.

Однако для многопериодных систем имеется дополнительная проблема резонансной связи колебаний с различными периодами, вследствие которой возможна неустойчивость колебаний по одной координате. В дальнейшем обсудим это при исследовании адиабатических интегралов движения как в ускорителях, так и в различных устройствах по удержанию плазмы.

Адиабатические интегралы для частицы, вращающейся в магнитном поле, будут рассмотрены только в гл. 5, так как некоторые аспекты этой задачи требуют специального подхода.

Адиабатическая инвариантность интеграла действия. В представленном здесь доказательстве, как и в других доказательствах адиабатической инвариантности, временная зависимость гамильтониана разбивается на две части, одна из которых либо постоянная, либо периодическая с периодом $2\pi/\omega$, а другая медленно изменяется со временем t , так что непериодическое изменение гамильтониана мало на протяжении фазового колебания точки системы. Кроме того, предположим, что частота периодической части гамильтониана несоизмерима с частотой фазового колебания, так что в случае отсутствия медленных вариаций, если положение частицы в фазовом пространстве выбрано с интервалами $\omega\Delta t = 2\pi$, гамильтониан в фазовом пространстве будет описывать замкнутую кривую. Доказательство этой теоремы, аналогичное доказательству [27], приведено ниже.

Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$H = H[p, q, f(\omega t), \lambda(t)], \quad (2.1)$$

где $f(\omega t) = f(\omega t + 2\pi)$ и H явно зависит от f , так что для постоянного значения λ гамильтониан имеет тот же период, что и f . Предполагается, что $\lambda(t)$ — медленно меняющаяся функция. Покажем,

что за время, равное периоду колебания, изменение гамильтониана зависит от начального значения H и не зависит от начального момента времени. Дифференцируя H по времени, получаем

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda}. \quad (2.2)$$

При подстановке p и q из уравнений Гамильтона (с $Q_i = 0$) первые два члена справа исчезают. Интегрируя от t_1 до t_2 оставшиеся члены, получаем

$$\Delta H = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H}{\partial f} \dot{f} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} dt.$$

Если выбрать интервал так, чтобы $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi n$, то первый член справа будет равен нулю вследствие периодичности f . Так как λ — медленно меняющаяся функция, можно считать, что $\dot{\lambda} = \text{const}$ за время интегрирования. Вынося $\dot{\lambda}$ за знак интеграла, получаем

$$\frac{\Delta H}{\Delta \lambda} = (1/\Delta t) \int_{t_1}^{t_2} (\partial H / \partial \lambda) dt, \quad (2.3)$$

где считаем, что $\dot{\lambda} \approx \Delta \lambda / \Delta t$. Из выражения (2.3) ясно, что если интервал Δt достаточно велик, то процесс усреднения будет давать одинаковый ответ для всех начальных и конечных фаз системы, т. е. для всех значений t_1 и t_2 с данным Δt . Мы можем показать это более отчетливо, смещая пределы интегрирования на время δt , имеющее порядок периода фазового колебания. При этом уравнение (2.3) имеет вид

$$\frac{\Delta H}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1 + \delta t}^{t_2 + \delta t} \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt + \frac{\delta t}{\Delta t} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{t=t_2} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{t=t_1} \right),$$

где предполагается, что $\partial H / \partial \lambda = \text{const}$ в течение δt . Далее для второго члена справа в пределе $\delta t / \Delta t \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{\delta t / \Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta t}{\Delta t} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{t_2} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{t_1} \right) = 0,$$

так что $\Delta H / \Delta \lambda$ не зависит от δt . Таким образом, все частицы, находящиеся в начальный момент на фазовой кривой постоянного гамильтониана, остаются на кривой постоянного H после медленного изменения гамильтониана, несмотря на то, что изменения гамильтониана сами по себе могут быть очень большими. По теореме Лиувилля площадь фазового пространства, ограниченная кривой постоянного гамильтониана, должна быть постоянной. Тем самым кос-

венно доказано, что интеграл действия для колебательных систем постоянен, т. е.

$$J = \oint p dq = \text{const} \quad (2.4)$$

при медленном изменении параметров, что и утверждается в адиабатической теореме. Наше предположение о кратности Δt периоду $\omega t = 2\pi$ не ограничивает общности теоремы. Так как рассматриваемый интервал Δt много больше длины периода, его можно разбить на две части: $(\Delta t)_p$ — кратную периоду и оставшуюся часть $(\Delta t)_a$. Эта теорема применяется к интервалу $(\Delta t)_p$, а λ можно считать постоянной в интервале $(\Delta t)_a$.

Приведенное здесь доказательство адиабатической инвариантности интеграла действия построено так, чтобы подчеркнуть связь между адиабатической инвариантностью и теоремой Лиувилля. Однако существуют другие доказательства, которые непосредственно демонстрируют адиабатическую инвариантность интеграла действия. Метод фазового интеграла, или метод ВКБ, рассмотренный в § 1.4, дает такое доказательство, применимое для линейных систем, гамильтониан которых постоянен и не содержит медленно меняющегося параметра. Общее доказательство для нелинейных систем впервые дано Бюргерсом [4] и перенесено на системы с периодическим гамильтонианом Саймоном [27] и Стэрроком [26]. В своем доказательстве Саймон предполагает, что в отсутствие медленно меняющихся параметров данный адиабатический инвариант является в действительности точной константой. Для линейных систем, используя теорию линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, можно непосредственно показать, что интеграл действия будет такой константой (см. § 1.4). Для нелинейных систем с периодическим H использование теоремы Лиувилля дает наиболее простое доказательство постоянства интеграла действия. Доказательство, данное Бюргерсом, а также Стэрроком, несколько отличается от доказательства, приведенного здесь, но в основном эквивалентно ему. Подробное изложение доказательства Бюргерса можно найти в работе [31].

К сожалению, адиабатическая теорема не дает количественного ответа на то, как медленно должны изменяться параметры, чтобы адиабатическая теорема была справедлива. С физической точки зрения можно полагать, что за время периода относительное изменение параметров будет мало, другими словами, при малом относительном изменении параметров частицы проходят через все фазы колебания. Однако на практике увеличение площади фазового пространства может быть совершенно ничтожным, несмотря на то, что изменение параметров явно не будет удовлетворять условию адиабатичности. В § 2.2 проверено количественно условие адиабатичности для случая линейного осциллятора и вычислено увеличение фазовой площади при почти адиабатическом изменении гамильтониана.

§ 2.2. Изменение интеграла действия для почти адиабатических систем

Введение. Кулсруд [14] исследовал с помощью асимптотического метода гармонический осциллятор, частота которого зависит от времени. Он показал, что если производные ω высшего порядка не имеют разрывов, то интеграл действия J — асимптотическая постоянная во всех порядках по параметру разложения. Это асимптотическое доказательство распространено на случай более общих осцилляторных систем с одной степенью свободы [10, 15, 28]. Затем Крускал [13] с помощью асимптотического метода исследовал почти периодические относительно одной степени свободы системы со многими степенями свободы. Метод Крускала рассмотрен в § 2.4. Асимптотические доказательства адиабатической инвариантности во всех порядках Чандрасекар [6] подверг критике, так как они не дают фактического изменения действия при изменении гамильтониана с конечной скоростью. Чандрасекар использовал метод итераций, аналогичный методу Хертвика и Шлютера, для того, чтобы вычислить увеличение магнитного момента вращающейся частицы, что эквивалентно вычислению увеличения интеграла действия для гармонического осциллятора. С помощью несколько отличного метода итераций [29] вычислено увеличение действия для гармонического осциллятора. Результат эквивалентен результату Чандрасекара. Кроме того, Нортроп [23, 24] указал, что обычные разложения магнитного поля, используемые для определения магнитного момента, — асимптотические, поэтому для изменения магнитного момента может быть использована асимптотическая теория. Затем Бакус, Ленард и Кулсруд [1] услужили задачу, показав, что для изменяющегося со временем гармонического осциллятора с особым изменением ω , которое допускает аналитическое решение, метод итераций не дает корректного асимптотического изменения действия. Наконец, Паркер [25] показал, что обычно итерационный процесс можно построить так, чтобы он давал сходящееся решение; таким образом, точное решение может быть аппроксимировано с любой степенью точности.

Полемика о справедливости асимптотических методов, по-видимому, академическая, ибо на вопрос, будет ли рост интеграла действия по мере увеличения гамильтониана ограниченным, оба метода дают утвердительный ответ. Также возможно ввести в асимптотический метод предположение, которое позволит вычислить увеличение интеграла действия для вариаций, изменяющихся с конечной скоростью. Если, например, в первой или более высоких производных частоты гармонического осциллятора имеются разрывы, то при условии, что асимптотический ряд справедлив вплоть до стольких членов, для которых существуют непрерывные производные более высокого порядка, метод Кулсруда можно использовать для вычисления изменения J . В этом параграфе мы получим изменение интеграла действия обоими методами, если такие разрывы

существуют, и покажем, что по крайней мере для производных первого порядка они дают одинаковые результаты. Однако ни одна из теорий не дает ответа на важный вопрос о том, когда адиабатическая теория перестает быть справедливой и приводит к неограниченному росту интеграла действия. В гл. 3 показано, что резкие изменения гамильтониана могут привести к неограниченному росту интеграла действия. Аналогично для многопериодных систем возникают такие ситуации, в которых адиабатическая теория неверна. Последнее, однако, может быть связано с резонансами между колебаниями с быстрыми и медленными периодами. Эта проблема обсуждена в § 2.4 и в гл. 4 и 5.

Метод асимптотического разложения. Распространим асимптотический метод вычисления изменений J , использованный Кулсрудом для гармонического осциллятора, на самую общую линейную одномерную систему, в которой два параметра изменяются со временем [18]. Предположим что параметры зависящей от времени системы: а) имеют некоторую неадиабатически меняющуюся производную (скажем, производную n -го порядка); б) производные более низкого порядка изменяются адиабатически; в) допускают асимптотическое разложение переменных, которое сходится по порядку, большему чем n всюду на временном интервале изменения параметров. Аппроксимируя неадиабатическую производную производной, имеющей разрыв, можно затем вычислить изменение действия, обусловленное разрывом. Проведено точное вычисление изменения действия для заданной вариации, удовлетворяющей указанным выше условиям и имеющей разрыв в первой производной. Полученное значение изменения действия совпадает с асимптотическим результатом.

Предположения, сделанные для развития теории, особенно уместны при рассмотрении движения частиц в ускорителе. Параметры, определяющие колебания в ускорителях, обычно имеют неадиабатическое изменение первой производной или производной некоторого низкого порядка. Это неадиабатическое изменение можно аппроксимировать разрывом, в котором и вычисляется изменение действия.

Уравнения движения одномерной линейной системы имеют вид

$$dp/dt = -F(t)q; \quad (2.5)$$

$$dq/dt = G(t)p, \quad (2.6)$$

где $-F(t)q$ — зависящая от времени возвращающая сила; $G(t)p$ — зависящая от времени обратная масса. Комбинируя (2.5) и (2.6), получаем дифференциальное уравнение второго порядка только для q :

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{dG/dt}{G} \cdot \frac{dq}{dt} + FGq = 0. \quad (2.7)$$

Рассмотрим решение в виде

$$q = v(t) \sin \left(\int S(t) dt + \delta \right). \quad (2.8)$$

Для системы с параметрами, постоянными во времени, (2.8) сводится к

$$q = v \sin(\omega t + \delta) \quad (2.9)$$

с соответствующим импульсом

$$p = Rv \sin[\omega t + \delta + (\pi/2)], \quad (2.10)$$

где

$$\omega = (FG)^{1/2}, \quad R = (F/G)^{1/2}. \quad (2.11)$$

Данный в (2.8) вид решения для q подобен решению, использованному для разработки метода ВКБ в § 1.4. Существенное различие состоит в том, что функция $S(t)$ не отождествляется явно с частотой колебаний и тем самым допускает в разложении большую свободу. Такой подход был введен Кулсрудом, следуя ему, мы записали решение в вещественном виде, а не в комплексном, как было сделано в § 1.4. Однако оба вида записи совершенно эквивалентны.

Функция R , определенная в (2.11), есть не что иное, как отношение p_{\max}/q_{\max} фазового эллипса, получаемое исключением t из (2.9) и (2.10), которое будем называть *осевым отношением*. В гл. 3 показано, что при резких изменениях в гамильтониане изменение интеграла действия непосредственно связано с изменением R , и наоборот, можно сразу показать, что интеграл действия является константой, если R постоянно. Для этого разделим (2.5) на (2.6) и получим

$$dp/dt = -(F/G)(q/p), \quad (2.12)$$

откуда видно, что для $R^2 = F/G = \text{const}$ орбиты эллипсов также остаются постоянными и согласно теореме Лиувилля ограниченное фазовое пространство должно быть также постоянным. Частота колебаний может меняться произвольно, причем частицы движутся по орбите с угловой скоростью $(FG)^{1/2}$.

В свете этих результатов условие медленного изменения параметров можно выразить как

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} \ll 1, \quad (2.13)$$

т. е. относительное изменение осевого отношения за период должно быть малым. Справедливость адиабатического рассмотрения зависит больше от медленности вариации R , а не ω . Эти две вариации идентичны в случае гармонического осциллятора с переменной частотой (переменная возвращающая сила и постоянная масса). Такой выбор малости параметра будет более подробно обоснован ниже.

Сделаем замену $\tau = t/T$, где $\varepsilon = 1/T$ — малая величина, равная по порядку $(1/\omega R) dR/dt$, тогда в новых обозначениях (2.8) запишется как

$$q(\tau) = v(\tau) \sin \left(T \int S(\tau) d\tau + \delta \right). \quad (2.14)$$

Разложим $v(\tau)$ в ряд по степеням $1/T$, оставив n членов, тогда, как показал Биркгоф [2], выражение (2.14) является асимптотическим решением уравнения (2.7) в том смысле, что для любого n

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^n \left[v(\tau) \sin \left(T \int S(\tau) d\tau + \delta \right) - q_1(\tau) \right] = 0,$$

где $q_1(\tau)$ — точное решение уравнения (2.7); τ — функция T .

Процедура исследования решения $q(\tau)$ заключается в разложении всех величин в ряд по степеням $1/T$ и в предположении, что все уравнения справедливы до любого порядка разложения. Так как асимптотическое решение обычно быстро сходится при малом числе членов ряда, можно получить хорошее приближение к конечному ответу при рассмотрении только нескольких членов. Адиабатическое решение, полученное в последнем параграфе, является фактически решением нулевого порядка разложения. Однако наши разложения корректны только асимптотически и поэтому они могут привести к неверному результату, если удержать слишком много членов разложения. Мы использовали $1/T$ в качестве малого параметра вместо того, чтобы взять $\varepsilon = 1/T$, как это часто делают, потому что мы желаем установить асимптотическую природу решения. Уравнение (2.7), записанное через новую независимую переменную τ , принимает вид

$$T^{-2} q'' - T^{-2} G^{-1} G' q' + FGq = 0. \quad (2.15)$$

Здесь и дальше штрих означает дифференцирование по τ . Следуя методу Кулсруда, находим соотношения между S и v подстановкой величины (2.14) и ее производных в (2.15). Поскольку δ — произвольный фазовый множитель, либо синус, либо косинус можно приравнять нулю. Поэтому, чтобы выражение (2.15) всегда имело место, коэффициенты при синусе и косинусе должны быть одновременно равны нулю, что дает

$$(S^{1/2} v)' - (G'/2G)(S^{1/2} v) = 0 \quad (2.16)$$

и

$$T^{-2} (v'' - T^2 S^2 v) - T^{-2} G^{-1} G' v' + \omega^2 v = 0. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.16) можно сразу проинтегрировать

$$S^{1/2} v = a^{1/2} \exp \left[\int (G'/2G) d\tau \right] = (aG)^{1/2}, \quad (2.18)$$

где a — постоянная интегрирования, непосредственно связанная с интегралом действия. Площадь фазового пространства, ограниченная гамильтонианом осциллирующей частицы, вообще говоря,

определена только для системы с замкнутыми фазовыми траекториями, т. е. для системы с постоянными параметрами. Поэтому будем предполагать, что до и после области изменения имеются области с постоянными параметрами, т. е. F и G изменяются в области $t_1 < t < t_2$, а в остальной области постоянны. Тогда площадь фазового пространства можно вычислить до и после временного интервала изменения параметров. Площадь фазового пространства вычисляется через интеграл действия $J = \oint pdq$. Подставляя сюда величины p и q (в области постоянства параметров) из (2.9) и (2.10), имеем

$$J = \pi R v^2. \quad (2.19)$$

С помощью (2.18) получаем интеграл движения

$$J = \pi a. \quad (2.19a)$$

Этот результат, по содержанию идентичный с адиабатической теоремой, корректен только асимптотически, так как (2.14) является асимптотическим решением уравнения (2.7). Это строго справедливо только для $T = \infty$. Если разложить S и v в ряды по степеням $1/T$ и потребовать, чтобы уравнения были справедливы для любого порядка независимо, то получим, что члены более высокого порядка зависят от более высокого порядка производных F и G . Если при некотором $t = t_0$ ($n - 1$) производные F и G непрерывны, а n -я производная имеет разрыв, то члены порядка $1/T^n$ в S и v также разрывны при $t = t_0$. Таким образом, значения a в (2.18) не могут быть одинаковыми для n -го порядка на обеих сторонах разрыва. Пусть $a = a_0$ слева от разрыва. Разложим a в ряд по степеням $1/T$ справа от разрыва:

$$a = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n / T^n. \quad (2.20)$$

Если разрывна n -я производная, то a_n — первый не исчезающий член разложения, который определяет увеличение действия из (2.19a):

Относительное изменение интеграла действия (относительное изменение площади фазового пространства, ограниченного траекторией частицы) определим как отношение

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{J(t_2+) - J(t_1-)}{J(t_1-)},$$

где t_1- и t_2+ — соответственно моменты времени до t_1 и после t_2 . Теперь вычислим $\Delta J/J$ для случая, когда имеется разрыв в производных первого порядка F или G . Это требует применимости асимптотического разложения до первого порядка параметра разложения. После подстановки

$$v = G^{1/2} W \quad (2.21)$$

и некоторой комбинации членов выражения (2.18) и (2.17) приобретают вид

$$SW^2 = a; \\ T^{-2}(W'' - G^{1/2}(G^{-1/2})''W) + (\omega^2 - S^2)W = 0.$$

Раскладывая S и W в ряд по степеням $1/T$, получаем

$$\left(S_0 + \frac{S_1}{T} + \frac{S_2}{T^2} + \dots \right) \left(W_0 + \frac{W_1}{T} + \frac{W_2}{T^2} + \dots \right)^2 = a; \\ T^{-2} \left[W_0'' + \frac{W_1''}{T} + \frac{W_2''}{T^2} + \dots - G^{1/2}(G^{-1/2})'' \left(W_0 + \frac{W_1}{T} + \frac{W_2}{T^2} + \dots \right) \right] + \\ + \left[\omega^2 - \left(S_0 + \frac{S_1}{T} + \frac{S_2}{T^2} + \dots \right)^2 \right] \left[W_0 + \frac{W_1}{T} + \frac{W_2}{T^2} + \dots \right] = 0. \quad (2.22)$$

Если a известно, уравнения (2.22) можно решить относительно S и W для любого порядка по $1/T$ с помощью последовательных приближений, а именно: сначала находим решение в нулевом приближении, пренебрегая в уравнении всеми членами ненулевого порядка, затем используем полученный результат и ищем решение в первом порядке. Повторяя эту процедуру, решим уравнения с точностью до n -го порядка.

Предположим, что некоторая производная функции F или G имеет разрыв. Так как a — постоянная интегрирования, можно ожидать, что ее значения будут различными по обеим сторонам разрыва. Если обозначить величину a перед разрывом через a_0 , то после разрыва значение a дается выражением (2.20). Значение a после разрыва определяется из требования непрерывности $q(\tau)$ и $q'(\tau)$ для любого порядка по $1/T$. Нулевым порядком уравнений (2.22) являются $W_0^2 S_0 = a_0$; $W_0(\omega^2 - S_0^2) = 0$. Разрешая эти уравнения относительно S_0 и W_0 , получаем

$$S_0 = \omega; \quad W_0 = (a_0/\omega)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Поскольку F и G непрерывны в точке разрыва, то ω и, следовательно, S_0 и W_0 также непрерывны в точке разрыва.

Приравняв в (2.22) члены первого порядка, получаем

$$2S_0 W_0 W_1 + W_0^2 S_1 = \begin{cases} 0 & \text{начальная область} \\ a_1 & \text{конечная область} \end{cases}$$

и

$$-2S_0 W_0 S_1 - S_0^2 W_1 + \omega^2 W_1 = 0.$$

Эти уравнения дают для S_1 и W_1

$$\left. \begin{aligned} S_1^i &= 0, & W_1^i &= 0; \\ S_1^f &= 0, & W_1^f &= a_1/(2W_0 S_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где верхние индексы i и f относятся соответственно к начальной и конечной областям. Полученные решения подчиняются граничным условиям

$$q^i = q^f \quad \text{и} \quad q^{i'} = q^{f'}, \quad (2.25)$$

где q находят из (2.14) и (2.21):

$$q = WG^{1/2} \sin \varphi,$$

а

$$q' = G^{1/2} \left(W' + \frac{G'W}{2G} \right) \sin \varphi + G^{1/2} TSW \cos \varphi,$$

здесь

$$\varphi = T \int S d\tau + \delta.$$

Если амплитуда осциллятора имеет разрыв (скачкообразный), φ также должна быть разрывна, чтобы удовлетворить (2.25). Поэтому разложим φ непосредственно после точки разрыва в ряд по степеням $1/T$:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{T} + \frac{\varphi_2}{T^2} + \dots,$$

где $\varphi = \varphi_0$ перед точкой разрыва. Подставляя в (2.25) разложения функций W , S и φ , сохраняя только члены первого порядка и раскладывая синус и косинус в ряд по степеням φ_1/T , получаем

$$W_1^i \sin \varphi_0 = W_1^f \sin \varphi_0 + \varphi_1 W_0 \cos \varphi_0$$

и

$$\begin{aligned} & \left(W_0' + \frac{G'W_0}{2G} \right)^i \sin \varphi_0 + (S_0 W_1 + W_0 S_1)^i \cos \varphi_0 = \\ & = (W_0' + G'W_0/2G)^f \sin \varphi_0 + (S_0 W_1 + W_0 S_1)^f \cos \varphi_0 - \\ & \quad - \varphi_1 S_0 W_0 \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Члены нулевого порядка одинаковы по обеим сторонам точки разрыва и поэтому сокращаются. Подставляя W_1 и S_1 из (2.24), после некоторых преобразований получаем

$$a_1 = 2W_0 (W_0' + G'W_0/2G) \Big|_f^i \sin \varphi_0 \cos \varphi_0,$$

где $\Big|_f^i$ указывает на то, что из начального значения нужно вычесть конечное. Вычисляя W_0 и W_0' в членах F и G из (2.23) и (2.11), получаем для a_1 выражение

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{a_0}{\omega} \left[\frac{\Delta F_1}{F} - \frac{\Delta G'}{G} \right] \sin \varphi_0 \cos \varphi_0, \quad (2.26)$$

где $\Delta G'$ и $\Delta F'$ — скачки производных (конечное значение минус начальное) в точке разрыва. Для того чтобы получить площадь фазового пространства в первом приближении по $1/T$, можно раз-

ложить в ряд уравнение (2.19). Повторно вводя производную $d/dt = T (d/d\tau)$ в (2.26) и подставляя полученное выражение в разложение (2.19а), находим относительное изменение фазового интеграла:

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{1}{2(2\omega)} \left[\frac{\Delta (dF/dt)}{F} - \frac{\Delta (dG/dt)}{G} \right] \sin \varphi_0 \cos \varphi_0. \quad (2.27)$$

Используем в этом случае тождество $\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = \sin(2\varphi_0 - \pi/2)$, выражение (2.27) будет эквивалентно выражению, найденному Кулсрудом для случая одного изменяющегося параметра и $n = 1$. Заметим, что изменение фазового интеграла в первом приближении зависит от скачка первых производных функций G и F . Если эти производные не имеют разрыва, фазовое пространство постоянно в первом приближении по $1/T$. Вычисление изменения интеграла действия для $n = 2$ с разрывами во второй производной F и G проводится аналогично. Как только получены результаты для $n = 1$ и $n = 2$, величина изменения интеграла действия со скачками в производных более высокого порядка вычисляется по индукции (раздельно для n четного и n нечетного). Получаем

$$\frac{\Delta J}{T} = \frac{1}{2(2\omega)^n} \left[\frac{\Delta (d^n F/dt^n)}{F} - \frac{\Delta (d^n G/dt^n)}{G} \right] \sin(2\varphi_0 - n\pi/2), \quad (2.28)$$

где $\Delta(d^n F/dt^n)$ — величина скачка n -й производной функции F в точке разрыва, а F , G и ω должны вычисляться в точке разрыва производной.

Предположим, что в начальной области все фазовое пространство, ограниченное траекторией осциллятора, заполнено, тогда в точке разрыва присутствуют все фазы. Определим *эффективную фазовую площадь* A как площадь, которая ограничена гамильтоновыми кривыми частиц, входящих при всех фазах, тогда эта эффективная фазовая площадь является просто интегралом действия той частицы, которая входит с фазой, максимизирующей $J(t_2 +)$. Из (2.28) видно, что такой фазой будет фаза, в которой $\sin(2\varphi_0 - n\pi/2) = 1$. После подстановки ее в (2.28) получим относительное увеличение в эффективной фазовой площади, равно:

$$\Delta A/A = (\Delta J)_{\text{макс}}/J. \quad (2.29)$$

Заметим, что, хотя J , связанное с одиночной частицей, может из-за неадиабатической производной либо увеличиваться, либо уменьшаться, A всегда увеличивается.

Во введении к этому параграфу указано, что для медленно меняющихся параметров различие между предсказанным адиабатической инвариантностью и действительным изменением J незначительное, однако понятие «медленно меняющийся» должно быть определено более тщательно. Например, легко показать, что если начальные F и G постоянны для $t < t_1$ и если F и G представимы в виде степен-

ного ряда, то асимптотическое разложение должно расходиться для всех конечных значений параметра разложения. Тогда для определения «медленного изменения» надо вычислить члены асимптотического ряда с тем, чтобы определить, где ряд начинает расходиться. Следует рассматривать только те члены, которые принадлежат сходящейся части ряда.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий ограниченность асимптотического метода. Пусть функция $F(t)$, определенная выражением (1.1), изменяется от значения F_{01} при t_1 до значения F_{02} при t_2 . Представим функцию F в области $t_1 < t < t_2$ в виде степенного ряда

$$F = F_{01} + F_1(t-t_1) + F_2(t-t_1)^2 + \dots$$

Для того чтобы установить эффект скачка в n -й производной функции F , потребуем, чтобы $n-1$ производных были непрерывны в начале интервала, а n производных — непрерывны в конце интервала. Можно сконструировать функцию F , удовлетворяющую этому требованию, взяв $2n$ членов степенного ряда. Тогда скачок n -й производной в начале интервала дается формулой [17]

$$\Delta \left(\frac{d^n F}{dt^n} \right)_{t=t_1} = \frac{(2n)! (F_{02} - F_{01})}{n! (t_2 - t_1)^n F_{01}}. \quad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в (2.28), получаем для относительного увеличения эффективной площади фазового пространства выражение

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{(2n)! (F_{02} - F_{01})}{2n! (2\omega)^n (t_2 - t_1)^n F_{01}}, \quad (2.31)$$

которое, очевидно, расходится с ростом n . Рассмотрим численный пример: пусть $F_{02} = 5F_{01}$ и $\omega(t_2 - t_1) = 12$, что имеет место в группирующей секции линейного ускорителя. Тогда

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}, \quad \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

соответственно для $n = 1, 2, 3$. Найдем, вычисляя последовательно производные более высокого порядка, что $\Delta A/A$ для $n = 7$ больше, чем для $n = 6$. Этот результат находится в противоречии с интуитивным представлением, что $\Delta A/A$ должно приближаться к минимальному значению, так как при добавлении новых членов в ряде для F функция F становится более гладкой. Трудности появляются из-за того, что результат в (2.31) корректен только асимптотически и после некоторого максимального n аппроксимация сильно ухудшается. Итак, асимптотическое разложение можно с успехом применять при вычислении изменения интеграла действия для систем с разрывами (неадиабатическим изменением) в производных достаточно малого порядка. Однако заключение об адиабатической инвариантности любого порядка разложения для непрерыв-

ных систем, которое выводится из рассмотрения всего ряда, означает только, что $\Delta A/A = 0$ является лучшим приближением, которое можно получить с помощью этого метода, и не содержит никакой информации о погрешности, связанной с вычислениями. Кроме того, фактическая величина $\Delta A/A$ имеет компоненту, обусловленную изменением R , которая связана с отклонением асимптотического разложения от точного решения и которой можно пренебречь только в быстро сходящейся части разложения.

Метод прямого вычисления. Теперь разработаем итерационный метод получения приращения интеграла действия при вариации параметров. Мы предполагаем, что значения, полученные этим методом, будут отличаться от значений, вычисленных асимптотическим методом в момент времени, когда траектория частицы в фазовом пространстве — замкнутая орбита.

Для данного случая, чтобы избежать трудностей, связанных с отсутствием замкнутых фазовых орбит, определим действие посредством канонического преобразования от переменных p, q к переменным θ, J , чтобы они приводили к исходным переменным в случае замкнутых фазовых орбит. Для исследования гармонического осциллятора наиболее удобна при преобразовании $p - q$ -пространства в $\theta - J$ -пространство производящая функция $F_1(q, \theta)$, так как она имеет простой вид. Введем, как в § 2.1, параметр λ , который представляет собой медленно изменяющуюся функцию времени. Новый гамильтониан связан со старым соотношением (1.30)

$$\bar{H}(\theta, J, \lambda) = H(p, q, \lambda) + (\partial F_1(q, \theta, \lambda))/\partial t. \quad (2.32)$$

Поскольку F зависит от времени только через λ , то

$$\bar{H} = H + \lambda (\partial F_1/\partial \lambda). \quad (2.33)$$

Здесь точка, как и прежде, означает полную производную по времени. Как и в соотношениях (2.16), переменные связаны функцией F :

$$p = \partial F/\partial q; \quad J = \partial F/\partial \theta. \quad (2.34)$$

Это позволяет выразить H и F через переменные угол — действие θ и J :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial J} = \frac{\partial H}{\partial J} + \lambda \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right); \quad (2.35)$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} = -\lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right). \quad (2.36)$$

Уравнения (2.35) и (2.36) являются общими, не считая того ограничения, что H зависит от времени через λ . Кроме нескольких частных случаев, один из которых рассмотрен в следующем параграфе, полное решение движения с изменяющимся λ получить нельзя. Однако если λ — медленно меняющийся параметр, можно получить

последовательные (лучшие) приближения к решению итерационным методом. Для нулевого порядка $\lambda \lambda = \text{const}$, поэтому из (2.36) имеем

$$dJ/dt = 0 \quad \text{или} \quad J = J_0.$$

Следовательно, из (2.35)

$$\partial H / \partial J = \omega(J_0, \lambda_0),$$

где λ_0 — просто константа. После интегрирования имеем

$$\theta = \theta_0(t) = \omega t + \varphi_0.$$

Это — решение для гамильтониана, который является циклическим по пространственной координате θ и, следовательно, функцией только постоянного обобщенного момента J_0 .

Используя метод [29] для гармонического осциллятора с изменяющейся частотой ω , перейдем к анализу первого порядка для одномерного гармонического осциллятора общего типа, изменяющегося со временем. Гамильтониан такого осциллятора уже найден:

$$H = (Gp^2/2) + (Fq^2/2), \quad (2.37)$$

где G и H , вообще говоря, функции времени. Производящей функцией для канонического преобразования к переменным угол — действие является функция

$$F_1 = (1/2) (F/G)^{1/2} q^2 \text{ctg } \theta; \quad (2.38)$$

соответствующие импульсы согласно (2.34)

$$p = Rq \text{ctg } \theta; \quad J = (1/2) Rq^2 \text{cosec}^2 \theta, \quad (2.39)$$

где, как прежде, $R = (F/G)^{1/2}$. Беря частную производную F_1 по времени, получаем

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{1}{4} R \left(\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{G}}{G} \right) q^2 \text{ctg } \theta. \quad (2.40)$$

Используя соотношения (2.37), (2.39), (2.40) и тождество $\sin 2\theta = 2 \text{ctg } \theta \sin^2 \theta$, находим из (2.39) новый гамильтониан

$$\bar{H} = \omega J + \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{R}}{R} J \sin 2\theta, \quad (2.41)$$

где

$$\omega = (FG)^{1/2}; \quad \dot{R} = R (\dot{F}/F - \dot{G}/G).$$

Здесь \dot{R} — медленно изменяющийся параметр λ из выражения (2.33). Однако следует помнить, что R может представлять два независимо меняющихся параметра, как видно из выражения (2.40). Из (2.35) имеем канонические уравнения для θ и J

$$\dot{\theta} = \omega + (1/2) (\dot{R}/R) \sin 2\theta; \quad (2.42)$$

$$\dot{J} = -(\dot{R}/R) J \cos 2\theta. \quad (2.43)$$

Используем теперь особое, вообще говоря неверное, предположение, что уравнение (2.44) не зависит от J . Решая итерационным методом, получаем для нулевого порядка θ (пренебрегаем \dot{R})

$$\theta = \theta_0 = \int_{t_0}^{t_1} \omega(t) dt \quad (2.44)$$

и для первого порядка по \dot{R}

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{R}}{R} \sin 2\theta_0 dt. \quad (2.45)$$

Подставим значение (2.45) в уравнение (2.43) и, разложив $\cos 2\theta$ в ряд Тейлора в окрестности θ_0 , получим для первого порядка по \dot{R}

$$(\dot{J}/J) = (\dot{R}/R) \cos 2\theta_0 + (\dot{R}/R) \sin 2\theta_0 \int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \sin 2\theta_0 dt.$$

После интегрирования имеем

$$\ln(J/J_0) = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \cos 2\theta_0 dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \sin 2\theta_0 \left[\int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \sin 2\theta_0 dt \right] dt.$$

Член, стоящий справа в квадратных скобках, является постоянным относительно второго интегрирования. Таким образом, потенцируя обе стороны равенства, имеем

$$(J/J_0) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \cos 2\theta_0 dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \sin 2\theta_0 dt \right]^2 \right\}.$$

Если разложим экспоненту по $(\dot{R}/R)^2$ и вычтем из полученного результата единицу, то для второго порядка приращения будем иметь

$$(\Delta J/J_0) = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \cos 2\theta_0 dt + \\ + \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \cos 2\theta_0 dt \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^{t_1} (\dot{R}/R) \sin 2\theta_0 dt \right]^2. \quad (2.46)$$

Первый член — синусоидальный и зависит от начальной и конечной фаз осциллятора. Его значение станет более очевидным, если перейти к переменной ωt , чтобы получить первый порядок приращения $(1/\omega)(\dot{R}/R)$:

$$(\Delta J/J_0) = \int_{\omega t_0}^{\omega t_1} (1/\omega) (\dot{R}/R) \cos 2\omega t d(\omega t) + O [(\dot{R}/R)^2]. \quad (2.47)$$

Последнее соотношение связано с асимптотическим результатом (2.27), так как, если при t_0 есть резкий скачок функции $(1/\omega)\dot{R}/R$ и если $(1/\omega)\dot{R}/R = \text{const}$ для всех t после t_0 , то, вычисляя $\Delta J/J_0$ в некоторый момент t_1 интегрированием (2.36), имеем соотношение

$$\frac{\Delta J}{J_0} = \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\dot{R}}{R} (\sin 2\omega t_0 - \sin 2\omega t_1), \quad (2.48)$$

которое аналогично асимптотическому результату для первого порядка, но зависит и от начального разрыва и от времени наблюдения. Если $(1/\omega)(\dot{R}/R)$ меняется непрерывно и равно нулю как при t_0 , так и при t_1 , то среднее значение $\langle \Delta J/J \rangle$ (по всем фазам), соответствующее произвольным конечным точкам, имеет какой-либо смысл. В этом случае среднее значение линейного члена в (2.46) равно нулю, и остаются только квадратичные члены. Для аналогичного выражения в работе [12] показано, что при изменении переменной $\tau = t/T$ от $-\infty$ до $+\infty$ имеем

$$\langle \Delta J/J \rangle = O[\exp(-\text{const} \cdot T)], \quad (2.49)$$

т. е. $\Delta J/J$ стремится к нулю быстрее любой степени T :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [T^n \exp(-\alpha T)] = 0$$

для всех α и n . Итак, в области определения асимптотического решения $\langle J \rangle$ постоянно для всех приближений.

Как указано во введении к этому параграфу, Бакус и др. [1] брали приращение частоты (специального вида) гармонического осциллятора, для которого точное решение может быть найдено.

Вводя медленно меняющийся параметр $\alpha \sim \left(\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right)$, в пределе $\alpha \rightarrow 0$ они нашли, используя метод итераций, $\langle \Delta J/J \rangle = (\pi^2/4) \exp(-2\pi\omega_0/\alpha)$, тогда как точное решение дает

$$\langle \Delta J/J \rangle = 2 \exp(-2\pi\omega_0/\alpha).$$

Разница в коэффициентах указывает на то, что итерационный метод не дает асимптотически правильных решений.

§ 2.3. О минимизации увеличения эффективного фазового пространства

Изменение интеграла действия, как показано в § 2.2, непосредственно связано с изменением осевого отношения R [см. (2.12)]. Действительно, если вычислить любой член асимптотического разложения, то его значение в любой момент $t = t_0$ зависит от величины относительного изменения R за период в момент времени t_0 . Для того чтобы наше разложение для любого момента времени между t_1 и t_2 было справедливо до того же порядка разложения, нужно потребовать, чтобы

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = \begin{cases} \varepsilon & t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{вне интервала } t_1 < t < t_2, \end{cases} \quad (2.50)$$

где ε — малое постоянное число, которое можно отождествить с параметром разложения ($\varepsilon = 1/T$). Подставляя R из (2.11), получаем внутри области $t_1 < t < t_2$

$$\frac{1}{2\omega} \left(\frac{dF/dt}{F} - \frac{dG/dt}{G} \right) = \varepsilon. \quad (2.51)$$

Для этой вариации F и G первые производные имеют разрывы. Чтобы использовать асимптотические формулы для вычисления $J(t_2 +)$, обусловленного действием исходного разрыва, введем временной интервал δt на конце области изменения. В интервале δt вариация существенно отличается от вариации (2.50); это позволяет сделать непрерывными первые производные F и G в точке t_2 . Выберем δt так, чтобы выполнялись неравенства $2\pi/\omega(t_2) \ll \delta t \ll t_2 - t_1$, из которых следует, что область адиабатическая, но мала по сравнению с полным временем перехода. Используя это предположение, можно вычислить из (2.27) изменение эффективной фазовой площади, обусловленное только исходным разрывом. Получим равенство

$$\Delta A/A = \varepsilon/2, \quad (2.52)$$

которое не зависит от F и G и, следовательно, подтверждает сделанный выбор параметра разложения. Можно построить область перехода с меньшим $\Delta A/A$, взяв первую производную всюду непрерывной, но область перехода, рассмотренная выше, имеет преимущество: она позволяет легко вычислить $\Delta A/A$ и для асимптотического метода гарантирует равномерную сходимость ряда. Хотя величины F и G могут изменяться при этом на несколько порядков, $\Delta A/A$, как вычислено из асимптотического ряда, зависит только от начальной непрерывной производной и не зависит от интервала перехода $t_2 - t_1$.

Получим этот же результат, используя метод прямого вычисления (см. § 2.2). Подставив (2.50) в (2.48), получим равенство

$$\Delta J/J = \frac{\varepsilon}{2} (\sin 2\omega t_0 - \sin 2\omega t_1),$$

которое дает для максимума $\Delta J/J$ для всех начальных фаз $\Delta A/A = \varepsilon/2$, что согласуется с асимптотическим результатом в первом порядке.

Асимптотическое решение для вариации (2.50) было проверено на основе точного вычисления в случае гармонического осциллятора. Баррен и др. [5] нашли асимптотическое решение, которое дает увеличение эффективной фазовой площади, согласующееся с (2.52). Можно также получить точное решение для системы специального вида, которое удовлетворяет условиям (2.50), однако это решение сохраняет общность, если F и G изменяются по закону

$$F = F_0 \exp(2\alpha t); \quad G = G_0 \exp(-2\alpha t). \quad (2.53)$$

В теории передающих линий системы с такой вариацией обычно называют экспоненциальной линией. Если подставим значения F и G из (2.53) в выражения для R и ω , то найдем, что

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{2\alpha}{(F_0 G_0)^{1/2}},$$

а сравнивая с (2.50), найдем из (2.52), что увеличение эффективной фазовой площади равно

$$\Delta A/A = \alpha / (F_0 G_0)^{1/2}. \quad (2.54)$$

Можно сравнить этот результат с точным решением, так как решения уравнений (2.5) и (2.6) можно найти (см., например, [3]). Получаем

$$p = \exp(\alpha t) \left[p_i \cos \omega t - \frac{F_0 q_i + \alpha p_i}{\omega} \sin \omega t \right]; \quad (2.55)$$

$$q = \exp(-\alpha t) \left[q_i \cos \omega t + \frac{G_0 p_i + \alpha q_i}{\omega} \sin \omega t \right]; \quad (2.56)$$

$$\omega = (F_0 G_0 - \alpha^2)^{1/2}. \quad (2.57)$$

Индекс i обозначает начальные значения p и q . Оценим интеграл действия. Используя (2.55) и (2.56), получаем

$$J = \pi \left[\frac{G_0}{\omega} p_i^2 + \frac{F_0}{\omega} q_i^2 + \frac{2\alpha}{\omega} p_i q_i + \left(\frac{\alpha}{\omega} \right)^3 p_i q_i \right]. \quad (2.58)$$

Предполагая $\alpha \ll (F_0 G_0)^{1/2}$, что эквивалентно медленно изменяющейся системе, и максимизируя J относительно начальных фаз, получаем максимальное относительное значение J (изменение эффективной фазовой площади):

$$\Delta A/A = \alpha / (F_0 G_0)^{1/2}, \quad (2.59)$$

что идентично полученному асимптотическому отношению (2.54).

Точное вычисление, как и метод прямого вычисления (см. § 2.2), дает выражения, отличающиеся от асимптотических членами второго порядка, которые не зависят от начальных и конечных фаз. Эти члены могут быть связаны с различным вычислением действия в постоянной или изменяющейся со временем области.

Теперь сравним асимптотическое значение $\Delta A/A$ для области перехода равномерно изменяющегося R с асимптотическим значением для перехода, который имеет непрерывную первую производную в точке $t = t_1$. Для перехода с непрерывной первой производной используем, например, степенной ряд из § 2.2, содержащий нужное число членов. Так как в этом примере меняется только F , соответствующее уравнение для равномерно меняющегося R приводится к виду

$$\frac{1}{(FG_0)^{1/2}} \cdot \frac{1}{F} \cdot \frac{dF}{dt} = \begin{cases} \varepsilon & t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{вне интервала } t_1 < t < t_2, \end{cases} \quad (2.60)$$

где $G = G_0 = \text{const}$. Переписав (2.60), получим в области $t_1 < t < t_2$ следующее уравнение: $dF/F^{3/2} = \varepsilon G^{1/2} dt$, которое имеет решение

$$F^{-1/2} - F_{01}^{-1/2} = \varepsilon G^{1/2} (t - t_1), \quad (2.61)$$

где F_{01} — значение F при $t = t_1$. Если потребовать, чтобы при $t = t_2$ F равнялась F_{02} , то из (2.61) найдем

$$\varepsilon = \frac{1 - (F_{01}/F_{02})^{1/2}}{\omega (t_2 - t_1)},$$

где $\omega = (F_0 G_0)^{1/2}$. Для примера из § 2.2 [$F_{02} = 5F_{01}$ и $\omega(t_2 - t_1) = 12$] найдем $\varepsilon \approx 0,023$, а из (2.52) получим для оптимального скачка первой производной увеличение

$$\Delta A/A \approx 0,0115. \quad (2.62)$$

Из (2.31) найдем, разложив F в степенной ряд при $n = 2$ (непрерывная первая производная, скачок во второй производной), $\Delta A/A \approx 0,045$, которое больше, чем найденное отношение (2.62).

В этом частном случае при переходе с равномерно меняющимся R изменение A меньше. Таким образом, построение области перехода с максимальным числом непрерывных производных не гарантирует нахождения минимального фазового пространства даже в области сходимости ряда. Для почти адиабатических систем значение $\Delta A/A$ мало для любого разумного параметра вариации. Когда параметры системы становятся все более неадиабатическими, равномерная вариация, которая гарантирует то же число порядков ряда, справедливых во всей области, кажется предпочтительней.

§ 2.4. Адиабатические инварианты для систем с более чем одной степенью свободы

Использование адиабатических инвариантов. Рассмотрим систему связанных дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} (d^2 x/dt^2) + f(x, y) &= 0; \\ (d^2 y/dt^2) + g(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Мы уже обсуждали различные методы решений таких уравнений.

1. Если уравнения описывают малые колебания около равновесной орбиты, то разложение в ряд Тейлора f и g дает уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y &= 0; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} y &= 0, \end{aligned}$$

которые можно легко решить как систему линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

2. Для нелинейных колебаний система имеет единственное точное решение, если существует преобразование, переводящее систему (2.63) в гамильтонову систему, для которой переменные разделяются. При этом импульс становится постоянным и выражается уравнением типа (1.35) или (1.36), имеющим решение, аналогичное (1.26). В гамильтоновой форме уравнение (1.41) записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, \alpha_x, \alpha_y)}{\partial \alpha_x}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x, \alpha_x, \alpha_y)}{\partial \alpha_y},$$

где постоянные импульсы α_x и α_y задаются тривиальными уравнениями

$$d\alpha_x/dt = d\alpha_y/dt = 0.$$

Теперь предположим, что такое разделение невозможно, но уравнения описывают колебательное движение, которое можно разбить на два почти периодических колебания с сильно различающимися периодами. Пусть эти колебания совершаются соответственно по направлениям x и y . Постоянные α являются интегралами действия для этих степеней свободы. Тогда имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, y, J_x, J_y)}{\partial J_x}; \quad (2.64a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x, y, J_x, J_y)}{\partial J_y} \quad (2.64b)$$

и

$$\frac{dJ_x}{dt} = - \frac{\partial H(x, y, J_x, J_y)}{\partial x}; \quad (2.64b)$$

$$\frac{dJ_y}{dt} = - \frac{\partial H(x, y, J_x, J_y)}{\partial y}, \quad (2.64г)$$

где x и y — «угловые» переменные. Для простоты предположим, что $H(x, y, J_x, J_y) = \text{const}$. Мы уже знаем, что для $y = y_0 = \text{const}$ имеется одномерное движение с $J_x = \text{const}$, являющееся решением уравнения (2.64в). Гамильтониан цикличен по x и можно непосредственно получить решение уравнения (2.64а) в виде квадратур. Будем теперь считать, что y медленно изменяется в течение полного колебания по x . Поскольку интеграл действия — адиабатический инвариант для медленных изменений параметров, то можно считать, что J_x «адиабатически» постоянен; таким образом, как и раньше, возвращаемся к решению $x(t, y_0)$. Однако это решение годится только для частного значения y : $y = y_0$. Если теперь y медленно меняется, то решение также меняется, но известным образом. В принципе мы получили решение уравнений (2.64б) и (2.64г) для y , так как, зная обе константы J_x и $x(t, y)$, можно уравнения относительно y привести к квадратурам. В случае, когда гамильтониан изменяется со временем (правда, достаточно медленно, чтобы J_y оставался также адиабатически постоянным), описанная процедура все еще верна.

Эквивалентный способ решения проблемы связанных колебаний — это рассмотрение колебаний в двумерном фазовом пространстве $x - p_x$ с медленным дрейфом орбиты в другом измерении. Если колебания несвязанные, то проекция траектории в плоскости $x - p_x$ будет замкнутой петлей, а ограничиваемая ею фазовая площадь (или, что эквивалентно, интеграл действия) — постоянна, как показано в § 1.3. Если дрейф по y меняет параметры, характеризующие колебания по x , незначительно в пределах одного периода этих колебаний, то, как мы видели в § 2.1, $\int p_x dx = \text{const}$ в приближении фазовой независимости, т. е. поведение частицы при всех x и при $y = y_0$ подобно медленному изменению y . Действительно (см. § 2.2), этот результат справедлив только асимптотически, если пользоваться разложением по параметру $\epsilon = 1/T$, где T — большое число, которое по существу является отношением медленного и быстрого периодов изменений. Этот вид разложения, развитый Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, описан в § 1.4. Однако Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов интересовались нахождением решения для медленной вариации y в присутствии быстрых колебаний по переменной x . Крускал [13] использовал этот метод, чтобы показать существование адиабатического интеграла движения для всех порядков разложения, если для самого низкого порядка одна из степеней свободы представляет периодическое движение. Теперь разберем метод формального разложения (метод Крускала).

Описание метода. Рассмотрим автономную (неявная зависимость от независимой переменной) систему уравнений в векторной форме

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(x, \epsilon). \quad (2.65)$$

Здесь $x' = dx/ds$ — независимая переменная; ε — малый параметр. Заметим, что для неавтономной совокупности уравнений можно ввести новую переменную $\sigma = s$, такую, что новая расширенная совокупность уравнений

$$x' = f(x, \sigma, \varepsilon), \quad \sigma' = 1 \quad (2.66)$$

будет автономна. Предположим, что для нулевого порядка по ε система (2.65) имеет вид

$$x' = f_0(x) \quad (2.67)$$

и будет периодической по s . Согласно этому предположению для N -компонентного вектора должно быть $N - 1$ переменных $y = y(x)$, удовлетворяющих уравнению

$$f_0 \nabla y = 0; \quad (2.68)$$

переменная $\theta = \theta(x)$, периодическая в нулевом порядке, определяет положение на замкнутой кривой. В новых переменных система (2.65) имеет вид

$$y' = \varepsilon g(y, \theta); \quad \theta' = \psi(y, \theta), \quad (2.69)$$

где благодаря (2.68) y' стремится к нулю вместе с ε . Отметим, что (2.69) эквивалентно (1.144) в методе усреднения Крылова — Боголюбова. Уравнения (2.69) представлены в виде, позволяющем выявить интеграл движения нулевого порядка, что понижает число независимых переменных на единицу. Однако для более высоких порядков петли не замкнуты, и поэтому интегралы движения более высоких порядков не выражаются точно в виде интегралов действия. Следуя Крускалу, проделаем дальнейшие преобразования, в результате которых получим замкнутые орбиты для всех порядков в разложении по степеням ε и тем самым постоянство интеграла действия во всех порядках. Было установлено, однако, что решения являются асимптотическими, поэтому здесь, как и в предварительном обсуждении, интеграл действия является лишь адиабатическим интегралом.

Введем новые переменные, чтобы сделать независимыми переменные, описывающие движение вдоль замкнутых орбит:

$$z' = \varepsilon h(z); \quad (2.70a)$$

$$\varphi' = \omega(z); \quad (2.70b)$$

где z' и φ' — функции y и θ . Покажем, что переменные в (2.70) z , φ , h и ω могут быть найдены независимо для любого порядка по ε . Поэтому требуется четыре соотношения, которые связывают величины n -го порядка с теми же величинами $(n - 1)$ -го порядка. Поскольку величины нулевого порядка могут быть определены, то индукцией можно получить полное решение. Чтобы получить

эти соотношения, выразим полные производные в (2.70) через переменные y и θ , используя уравнения (2.69) и уравнения преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_y z \varepsilon g + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \psi &= \varepsilon h(z); \\ \nabla_y \varphi \varepsilon g + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \psi &= \omega(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

Дополнительно потребуем, чтобы z и φ были периодическими, т. е.

$$\left. \begin{aligned} z(y, \theta + 2\pi) &= z(\theta, y); \\ \varphi(y, \theta + 2\pi) &= \varphi(y, \theta) + 2\pi, \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

где φ — переменная, аналогичная углу. Введем несколько произвольных начальных условий, которые позволят выразить решения для z и φ через y и θ :

$$z(y, \theta) = y; \quad \varphi(y, 0) = 0. \quad (2.73)$$

Возможен также и другой выбор начальных условий, но условия (2.73) упрощают преобразования. Теперь получим выражения, из которых можно вычислить z , φ , h и ω для любого порядка по ε . Предположим, что можно вычислить y , θ , g и ψ точно. Возможны также другие методы, ниже мы кратко остановимся на них. Деля (2.71) на ψ , интегрируя и определяя постоянные интегрирования из начальных условий, получаем

$$z = y + \varepsilon \int_0^{\theta} (h(z) - \nabla_y z g) \frac{d\theta}{\psi}; \quad (2.74)$$

$$\varphi = \int_0^{\theta} (\omega(z) - \varepsilon \nabla_y \varphi g) \frac{d\theta}{\psi}. \quad (2.75)$$

Используя условие периодичности, имеем

$$\int_0^{2\pi} (h(z) - \nabla_y z g) \frac{d\theta}{\psi} = 0; \quad (2.76)$$

$$\int_0^{2\pi} (\omega(z) - \varepsilon \nabla_y \varphi g) \frac{d\theta}{\psi} = 2\pi. \quad (2.77)$$

Четыре уравнения (2.74) — (2.77) можно использовать для определения неизвестных переменных z , φ , h , ω для любого порядка по ε . Предположим, например, что переменные известны до $(n-1)$ -го порядка по ε . Тогда интеграл в (2.74) (величина того же порядка), умноженный на ε , даст z_n :

$$z_n = y + \varepsilon \int_0^{\theta} (h_{n-1} - \nabla_y z_{n-1} g) \frac{d\theta}{\psi}. \quad (2.78)$$

Теперь можно найти h_n из уравнения (2.76). Если известно φ_{n-1} , то из (2.77) независимо находится ω_n . После определения ω_n из (2.75) можно найти φ_n . Этот метод усреднения [см. уравнение (2.78)] аналогичен видоизмененному методу Крылова — Боголюбова для первого порядка; для первого порядка z он дает усредненную переменную из § 1.4. Однако условие периодичности z во всех порядках более существенно, чем то, что z усредненная величина первого порядка.

Адиабатическое разделение переменных. В § 1.2 показано, что для гамильтоновой системы существует инвариант движения

$$\oint \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) = \text{const},$$

где контур интегрирования — любая замкнутая кривая в фазовом пространстве. Для медленно изменяющегося H имеется адиабатический инвариант

$$J = \oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \text{const}.$$

В § 2.2 для вычисления J необходимо было проводить интегрирование в области, в которой контур интегрирования — замкнутая кривая. Теперь ослабим это ограничение. Будем считать, что кривая замкнута только асимптотически. Мы показали, что $z = \text{const}$ представляет такую кривую; используя переменные (2.70), имеем

$$J = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n p_i (dq_i/d\varphi) d\varphi = \text{const}, \quad (2.79)$$

где p_i , q_i и H — функции новых переменных z и φ . Далее, если мы сможем показать, что J и φ — переменные типа угол — действие, то уравнения Гамильтона после преобразования к новым переменным

$$Q_1, \dots, Q_{n-1}, \varphi, \quad P_1, \dots, P_{n-1}, J$$

примут вид

$$Q_i = \frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, J)}{\partial P_i}; \quad P_i = - \frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, J)}{\partial Q_i}, \quad (2.80)$$

где J — параметр. Здесь число степеней свободы уменьшено на единицу. Крускал доказал каноническую природу J и φ , показав, что скобки Пуассона

$$[\varphi, J] = 1. \quad (2.81)$$

Действительно,

$$[\varphi, J] = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial J}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial J}{\partial q_i} \right).$$

Если φ — одна из координат q_i , J — одна из координат p_i и все переменные считаются независимыми, то останется только k -й член, для которого $\varphi = q_k$ и $J = p_k$, так что

$$[\varphi, J] = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial J}{\partial J} = 1.$$

Доказательство соотношения (2.81) в случае, когда J задано уравнением (2.79), довольно сложно, однако форма равенства (2.79) подсказывает нам, что J — интеграл движения. Действительно, из существования интеграла движения J , вытекают уравнения (2.80). Тем самым число степеней свободы всегда можно уменьшить на единицу. Уравнение (2.81) позволяет уменьшить количество переменных, поскольку оно связывает две переменные.

Полное преобразование, позволяющее получить переменную действия, а также обратные преобразования, которые дают инварианты как функции исходных переменных, очень сложны. Более простые алгоритмы разложения были предложены Макнамарой и Вайтманом [20], которые показали, что их метод эквивалентен методу Крускала. В методе Макнамары и Вайтмана переменные y выбраны так, чтобы одна из переменных y была канонической при записи через переменные угол — действие. В нулевом порядке метод дает явный вид интеграла движения, который приводит к уменьшенной системе уравнений Гамильтона (2.80). При использовании метода Крускала более высокие порядки y , так же как и z , следует вычислять из асимптотических выражений.

Применение асимптотического метода к гармоническому осциллятору. Асимптотический метод (метод Крускала) разработан для многомерных систем, однако простейшая одномерная задача о гармоническом осцилляторе выявляет его основные особенности. Рассмотрим для простоты вместо уравнений движения одномерной системы (2.5) и (2.6) уравнения

$$dp/dt = -F(\epsilon t)q; \quad dq/dt = Gp. \quad (2.82)$$

В (2.82) только F зависит от времени, причем запись аргумента в виде ϵt означает слабую зависимость F от t . Выразим (2.82) в стандартной форме автономной системы уравнений первого порядка, введя для этого новую переменную $\tau = \epsilon t$:

$$\dot{p} = -F(\tau)q; \quad \dot{q} = Gp; \quad \dot{\tau} = \epsilon. \quad (2.83)$$

Для самого низкого порядка ϵ имеем $\tau = \text{const}$ и, следовательно, $F = \text{const}$. Пусть y — векторная переменная

$$y = (H, \tau), \quad (2.84)$$

где

$$H = (F/2)q^2 + (G/2)p^2 \quad (2.85)$$

есть гамильтониан, в нулевом приближении $H = \text{const}$. Решение нулевого порядка описывает обычный гармонический осциллятор

$$\left. \begin{aligned} q &= v \sin(\omega t + \delta); \\ p &= Rv \cos(\omega t + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

где, как и раньше, $R = (F/G)^{1/2}$ и $\omega = (FG)^{1/2}$. Введем угловую переменную $\theta = \omega t + \delta$. Из уравнений (2.86) находим

$$\theta = \arctg(Rq/p). \quad (2.87)$$

В новых переменных, заданных соотношениями (2.84) и (2.87), имеем

$$\left. \begin{aligned} y &= \varepsilon g(y, \theta); \\ \dot{\theta} &= \psi(y, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Теперь, чтобы перейти к новым переменным, не зависящим от угла, используем преобразования (для каждого порядка) (2.74) — (2.77). Для этого необходимо сначала получить выражения для производных \dot{H} и $\dot{\theta}$. Продифференцировав гамильтониан (2.85) и воспользовавшись уравнениями (2.83), получим

$$\dot{H} = (\varepsilon/2) F' q^2,$$

где F' — производная по τ . Из соотношений (2.85) и (2.87) получаем следующие выражения для q и p в переменных H и θ :

$$q^2 = (2H/F) \sin^2 \theta; \quad p^2 = (2H/G) \cos^2 \theta. \quad (2.89)$$

Подставляя найденное выражение для q^2 в соотношение для H , находим

$$\dot{H} = 2\varepsilon (R'/R) H \sin^2 \theta, \quad (2.90a)$$

здесь использовано соотношение $R'/R = F'/2F$. Исходя из определений предыдущего раздела, имеем

$$\dot{y} \equiv (\dot{H}, \dot{\tau}) \equiv \varepsilon(U, 1) \equiv \varepsilon g(H, \tau, \theta).$$

Аналогично получаем производную от угловой переменной, дифференцируя (2.85) и используя соотношения (2.83):

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1+(Rq/p)^2} \left[\varepsilon \frac{R'}{R} \cdot \frac{Rq}{p} + \omega \left(1 + \left(\frac{Rq}{p} \right)^2 \right) \right].$$

Подставляя значение Rq/p , полученное из (2.87), получаем

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon (R'/2R) \sin 2\theta \equiv \psi(H, \tau, \theta). \quad (2.90b)$$

Полученные уравнения (2.89) и (2.90) можно использовать для определения новых переменных. Полагая $z = (\bar{H}, \tau)$ и $\bar{U} = \dot{\bar{H}}$ [z и \bar{h} определяются непосредственно из (2.74) и (2.76)], находим

$$\bar{H} = H + \varepsilon \int_0^\theta \frac{\bar{U}(\bar{H}, \tau) - \nabla_H \bar{H} (2R'/R) H \sin^2 \theta - \nabla_r \bar{H}}{\omega + (\varepsilon/2) (R'/R) \sin 2\theta} d\theta;$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\bar{U}(\bar{H}, \tau) - \nabla_H \bar{H} (2R'/R) H \sin^2 \theta - \nabla_r \bar{H}}{\omega + (\varepsilon/2) (R'/R) \sin 2\theta} d\theta = 0$$

и для первого порядка

$$\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \left(\bar{U}(\bar{H}, \tau) - \frac{2R'}{R} H \sin^2 \theta \right) d\theta = 0,$$

что дает

$$\bar{U} = (R'/R) H. \quad (2.91)$$

Подставляя \bar{U} в выражение для \bar{H} и интегрируя, получаем

$$\bar{H} = H (1 + \varepsilon (R'/2\omega R) \sin 2\theta). \quad (2.92)$$

Соотношения (2.91) и (2.92) определяют так называемые хорошие переменные, так как $\dot{z} = \varepsilon(\bar{U}, 1)$ не зависит от φ [см. уравнение (2.70a)]. Аналогично можно построить преобразование, которое приводит к уравнению для угловой переменной (2.70б).

Теперь выразим интеграл движения через эти новые переменные:

$$J = \oint p dq = \int_0^{2\pi} p \frac{dp}{d\theta} d\theta, \quad (2.93)$$

где p и q — функции \bar{H} и θ . Для первого порядка по ε достаточно выполнить интегрирование по θ , тем самым упрощая преобразования. Подставляя значения p и q из (2.89) и дифференцируя q , имеем

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{2H}{\omega} \cos^2 \theta d\theta.$$

Подставляя \bar{H} из (2.92), получаем

$$\bar{J} = \int_0^{2\pi} \frac{2\bar{H}}{\omega} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\omega} \frac{R'}{R} \sin 2\theta \right) \cos^2 \theta d\theta.$$

Выполняя интегрирование и учитывая, что второй член в результате интегрирования дает нуль, имеем для адиабатического интеграла

$$\bar{J} = 2\pi \bar{H} / \omega. \quad (2.94)$$

В области, в которой параметры не меняются, $R' = 0$ и мы получаем обычный адиабатический результат

$$H/\omega = \text{const.}$$

Теперь мы видим, что этот результат справедлив только для нулевого порядка в области с параметрами, изменяющимися со временем. Для первого порядка адиабатичность \bar{J} эквивалентна изменению J , полученному прямым вычислением по формуле (2.48). Мы выразили \bar{J} через хорошие переменные, в результате чего получили величину, асимптотически постоянную для всех порядков по ϵ , даже в случае, когда параметры меняются со временем. Покажем теперь прямым вычислением, что $d\bar{J}/dt$ действительно равно нулю. Дифференцируя (2.94) и подставляя \bar{H}' , определяемое формулой (2.91), получаем равенство

$$\dot{\bar{J}} = 2\pi\epsilon \left(\frac{\bar{H}'}{\omega} - \frac{H}{\omega} \cdot \frac{\omega'}{\omega} \right) = 2\pi\epsilon \left(\frac{H}{\omega} \cdot \frac{R'}{R} - \frac{H}{\omega} \cdot \frac{R'}{R} \right) = 0, \quad (2.95)$$

справедливое для первого порядка по ϵ . При этом мы использовали соотношение $\omega'/\omega = R'/R$, которое верно, если есть только один меняющийся параметр.

В работе [19] в качестве исходных переменных в преобразовании использовано J , а не H и получен гамильтониан в виде

$$H = p_1 + \epsilon\Omega(p_1, q_1), \quad (2.96)$$

где $p_1 = J$; $q_1 = \theta$. Преобразование к хорошим переменным, найденное другим способом, дает \bar{J}_1 непосредственно. Однако (2.96) можно получить не обязательно только как разложение по ϵ . Так, можно требовать почленного разложения для промежуточных переменных и хороших переменных. Ниже мы рассмотрим методом [19] задачу, которая покажет пределы применимости адиабатической теории.

Амплитудные функции и точные инварианты. В асимптотическом разложении по хорошим переменным на любой стадии можно вновь восстановить исходные переменные q и p . В частности, $q(t)$ есть полное решение движения как функция времени. В § 1.4 получено решение для нулевого порядка по ϵ или для ВКБ-приближения:

$$q(t) \sim \frac{1}{\omega(t)^{1/2}} \cos \left[\int \omega(t) dt + \delta \right]. \quad (2.97)$$

Для последующих более высоких порядков можно построить $q(t)$ в форме, совершенно аналогичной (2.97), с той лишь разницей, что функция $\omega(t)$ заменена более сложной функцией параметра разложения. Для решения первого порядка, которое приведено в предыдущем разделе, q определяется из формулы (2.89):

$$q = (2H/F)^{1/2} \sin \theta.$$

Подставляя H из (2.92) и θ из (2.90б), получаем

$$q(t) = \frac{(\bar{J}G/\pi)^{1/2}}{[\omega(1 + \varepsilon(R'/2\omega R)\sin 2\theta)]^{1/2}} \times \cos \left[\int \omega \left(1 + \varepsilon \frac{R'}{2\omega R} \sin 2\theta \right) dt + \delta \right], \quad (2.98)$$

где $R = (F/G)^{1/2}$; G , как и раньше, — константа; \bar{J} — константа, введенная в предыдущем разделе. Видим, что выражение (2.98) имеет вид, аналогичный (2.97). Вообще, можно выразить $q(t)$ в первом порядке в форме

$$q(t) = (\varepsilon^{1/2}/\beta(t)^{1/2}) \cos \left[\int \beta(t) dt + \delta \right], \quad (2.99)$$

где $\beta(t)$ может быть как периодической, так и медленно меняющейся со временем функцией. Функция $\beta(t)$ играет важную роль в периодических системах, где ее обычно называют *амплитудной функцией*, поскольку она описывает вариации огибающей $q(t)$. Подробнее эта функция рассмотрена в § 3.3 и 4.1 при обсуждении транспортировки пучков и периодической фокусировки в ускорителях.

В предыдущих параграфах мы получили асимптотические выражения для адиабатических инвариантов. Численные расчеты (см. следующий раздел), а также эксперименты указывают, что существуют точные инварианты, асимптотические приближения которых мы получили. Так, в (2.99) мы нашли для $\beta(t)$ только асимптотическое выражение, однако следует предполагать, что существует ее точное значение. Если выражение (2.99) задано, то можно построить точный инвариант, несмотря на то что $\beta(t)$ известно только асимптотически. Такой инвариант построен в § 4.1 с использованием результатов, полученных в § 3.3. Впервые он был получен Курантом и Снайдером [7]:

$$\frac{1}{\beta} \left[q^2 + \left(\beta \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{\beta} q \right)^2 \right] = \varepsilon = \text{const}, \quad (2.100)$$

где $\beta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\dot{\beta}^{1/2}) - (\varepsilon/\beta^{3/2}) + \omega\beta^{1/2} = 0. \quad (2.101)$$

Точный инвариант играет важную роль в теории периодических фокусирующих систем. Льюис [16] независимо получил соотношения (2.100) и (2.101). Кроме того, он показал, что эти результаты независимо удовлетворяются для всех порядков асимптотического разложения Крускала.

Пределы применимости адиабатической теории. Проиллюстрируем на примере ограниченность адиабатической теории. Рассмотрим движение в двумерной потенциальной яме:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right). \quad (2.102)$$

Она отличается от потенциала, соответствующего гармоническим колебаниям при малых x и y , треугольными эквипотенциалами

на краях ямы (рис. 2.1). Гамильтониан частицы, осциллирующей в яме и имеющей полную энергию E , дается в прямоугольных координатах выражением

$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) = E, \quad (2.103)$$

где для удобства масса частицы нормирована на единицу. Если E меньше предельной потенциальной энергии $U = 0,1667$, то частицы будут захвачены ямой. Возьмем теперь частицы с различными

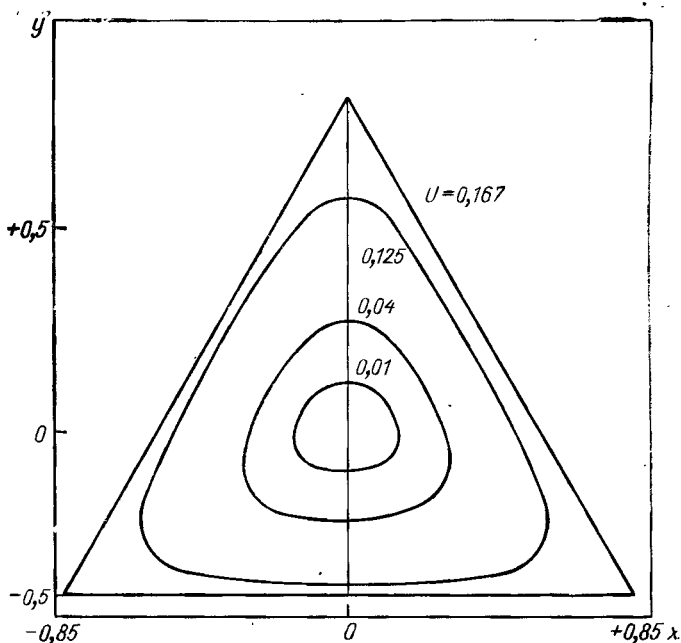


Рис. 2.1. Потенциальная яма. Линии постоянного U .

начальными условиями и будем наблюдать их фазовые траектории в проекции на плоскость $y - \dot{y}$. Получим как бы фазовое сечение, соответствующее заданной полной энергии E . Рассматривая последовательность таких сечений для разных значений U , можно определить, существует ли изолирующий интеграл (см. § 1.1). Если последовательные сечения в плоскости $y - \dot{y}$ дают замкнутые кривые, то движение в плоскости $y - \dot{y}$ независимо от движения в плоскости $x - \dot{x}$. В пределе малых колебаний для гармонического потенциала это, конечно, верно и в этом можно убедиться, записав гамильтониан в переменных угол — действие $H_{\text{гарм}} = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2$, где для обычного потенциала $(1/2)(x^2 + y^2)$ и ω_1 и ω_2 равны единице. Если теперь принять во внимание малые возмущения, вызванные негармоническими членами в потенциале (2.102), то гамиль-

тониан можно записать в виде $H = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \varepsilon \hat{H}(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$. Уравнения движения, написанные с помощью этого гамильтониана, имеют вид, который допускает применение к ним метода, изложенного в § 2.4. Хотя колебание по одной степени свободы не является медленным по сравнению с другим колебанием, обе степени свободы связаны достаточно слабо, так что отклонение от замкнутой орбиты в одной фазовой плоскости мало, следовательно, критерий адиабатичности выполнен. В этом случае фазовые кривые в сечении оказываются замкнутыми и могут быть найдены либо численным решением связанных уравнений движения, либо вычислением адиабатических инвариантов вплоть до достаточного порядка по ε . Если в разложении взять недостаточное число членов, то кривые, хотя и будут замкнуты, однако не совпадут с численным решением. С другой стороны, если взять слишком много членов, ответ также будет отличаться от правильного решения вследствие асимптотической природы ряда. Макнамара и Вайтман вычислили J в нулевом и первом порядке для начальной энергии $E = 0,01$ и при различных начальных условиях. Полученные ими сечения показаны на рис. 2.2. На рис. 2.3 изображены кривые постоянного J , полученные для того же значения E численным решением уравнений движения.

Для этого конкретного примера члены высших порядков очень важны и даже изменяют характер решений; в точном решении точки A и B имеют окрестность, в пределах которой ограничено движение частиц, в адиабатическом решении у точек A и B такой окрестности нет. Чтобы получить похожие результаты, Макнамара и Вайтман вынуждены были разложить асимптотический ряд до четвертого порядка по ε . Хенон и Хейлес [11] вычисляли фазовые сечения для более высоких начальных энергий. На рис. 2.4 показано сечение для $E = 0,0833$. Из рис. 2.4 видно, что интеграл движения существует, однако не ясно, будет ли асимптотическое разложение сходиться к этой константе. На рис. 2.5 показаны фазовые орбиты для еще более высокой энергии $E = 0,125$. Здесь три типа орбиты: простые замкнутые орбиты, как и в случае более низких энергий, многопетельные орбиты, представленные пятью маленькими петлями, и, по-видимому, эргодические орбиты: беспорядочные точки являются последовательными пересечениями этих орбит с поверхностями сечения. Для этого типа орбит интеграл действия не является больше адиабатическим инвариантом, и его нельзя оценить из асимптотического разложения. Пока еще нет способа оценивать, когда изолирующий интеграл перестает существовать. Очевидно, что применение итерационного метода вместо асимптотического не прояснит этот вопрос.

Топологические доказательства [21] показали существование изолирующих интегралов в некоторых частных случаях, однако они непригодны в качестве систематического метода для оценки области перехода, когда изолирующий интеграл уже не существует. Мозер показал, что при определенных начальных условиях может быть

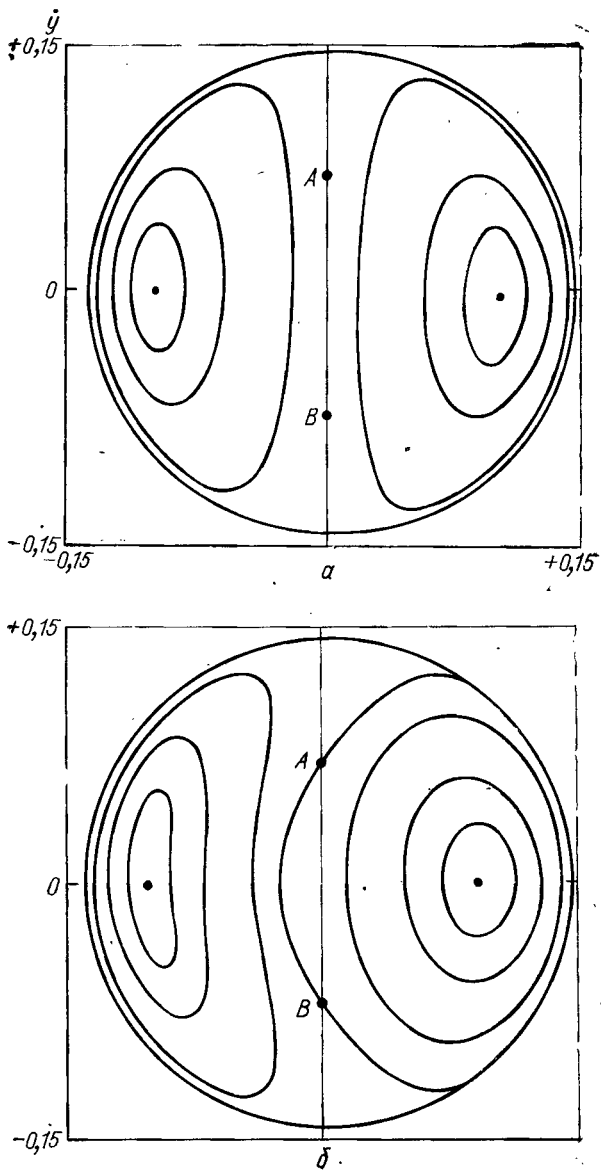


Рис. 2.2. Поверхности сечения, вычисленные с использованием адиабатических инвариантов соответственно нулевого (а) и первого (б) порядков; $E=0,01$.

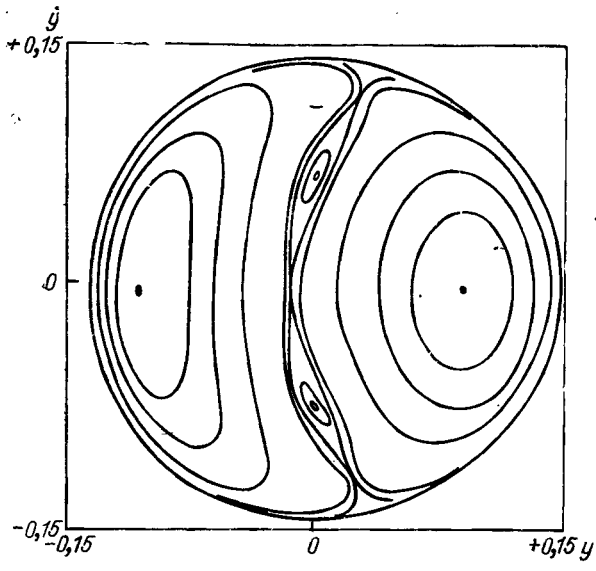


Рис. 2.3. Поверхности сечения, полученные путем вычислений орбит; $E=0,01$.

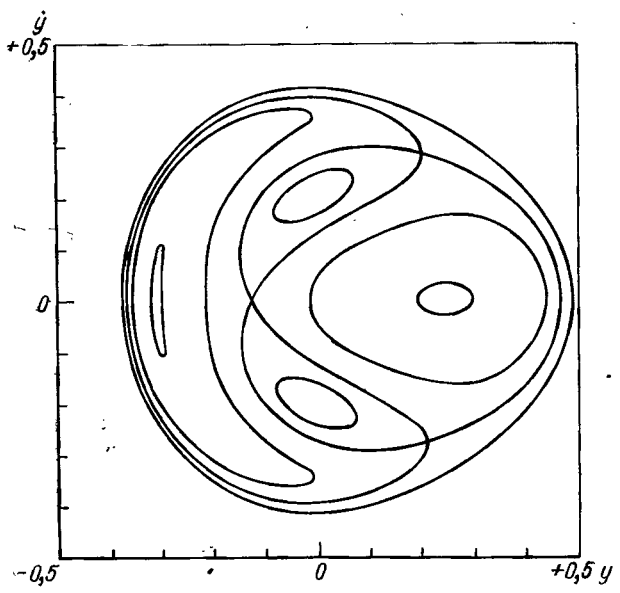


Рис. 2.4. Результаты для $E=0,0833$.

найденно решение в виде ряда, сходящегося быстрее асимптотического. Существование сходящихся решений ограничивается резонансами между собственными частотами системы. Чем больше возмущающие члены (члены, содержащие ϵ), тем больше области начальных условий, для которых нельзя найти сходящихся решений. Это

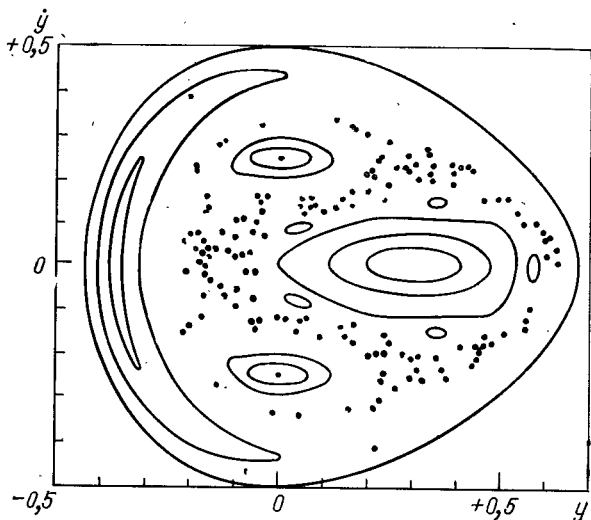


Рис. 2.5. Результаты для $E=0,125$.

явление, вероятно, связано с распадом изолирующих интегралов на дискретные области, как нашли численным методом Хенон и Хейлес. Возможно, что для малых возмущений точные изолирующие интегралы не существуют нигде, но они так близко ограничены точными интегралами, что разницы между ними не наблюдается. В любом случае асимптотические разложения для достаточно малых возмущений дают, по-видимому, точные результаты. Ряд вопросов теории приведен и обсуждается в обзорной статье Мозера [22]. Результаты, аналогичные топологическим доказательствам Мозера, получил Де-Вогелаер [8] для магнитного диполя и разработал Драгт [9] (он дал также численный пример). Эти результаты показывают, что при подходящих ограничениях поверхность сечения может быть преобразована в себя при применении уравнений движения. Такое преобразование ограничивает замкнутое фазовое пространство и, очевидно, эквивалентно адиабатическому предположению, которое введено в § 2.1. Драгт тем же способом, что и Хенон и Хейлес, численно проверил ограничения на адиабатическую природу решений. В § 5.2 обсуждена эта работа Драгта и представлены некоторые его результаты. Читателя, интересующегося подробностями, мы отсылаем к оригинальной статье Драгта. В гл. 5 рассмотрено несколько примеров перехода от адиабатического поведения к неадиабатическому, включая некоторые следствия из резонансной связи между модами колебаний.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 3.1. Основные понятия

Введение. В § 1.1 отмечено, что одной из главных причин введения фазового пространства является наша способность следить скорее за движением ограниченных областей в фазовом пространстве, чем за индивидуальными траекториями, которые образуют эту область. Так как фазовые траектории не могут пересекать одна другую, то группы фазовых точек, ограничивающих первоначально некоторую область, будут оставаться граничными все время. Таким образом, зная поведение границы, мы можем сделать заключение о положениях и импульсах всех частиц, находящихся в этой области. Такие заключения можно сделать как для колебательных, так и для неколебательных систем. Дополнительные преимущества имеются в случае колебательных систем, обладающих либо одной, либо несколькими степенями свободы, по которым переменные разделяются. Если гамильтониан частицы постояен, то интеграл движения локализует пучок частиц в фазовом пространстве. Траектория одной частицы однозначно ограничивает всю группу траекторий. Как показано в гл. 2, при медленном изменении параметров частицы, первоначально лежащие на кривой постоянного гамильтониана, продолжают оставаться на ней и после того, как гамильтониан изменяет свое значение. Таким образом, частица, орбита которой, взятая за один период, ограничивает группу траекторий, продолжает оставаться граничной, несмотря на тот факт, что гамильтониан частицы и форма орбиты изменились. В силу теоремы Лиувилля площадь в фазовом пространстве, ограниченная этой орбитой, остается постоянной, что, как показано в гл. 2, также означает адиабатическое постоянство интеграла действия.

Скачкообразное изменение параметров. В большинстве случаев гамильтониан частицы изменяется за время, короткое в сравнении с периодами любых колебаний системы, и, таким образом, теория адиабатических инвариантов здесь неприменима. Исследуем поведение области фазового пространства в случае быстрого изменения гамильтониана. Рассмотрим пучок частиц, входящих в область, где силы, действующие на частицы, нелинейны. В качестве примера рассмотрим группирующую секцию линейного ускорителя, где область фазового пространства, отвечающая устойчивым колебаниям, состоит из семейства кривых постоянного гамильтониана,

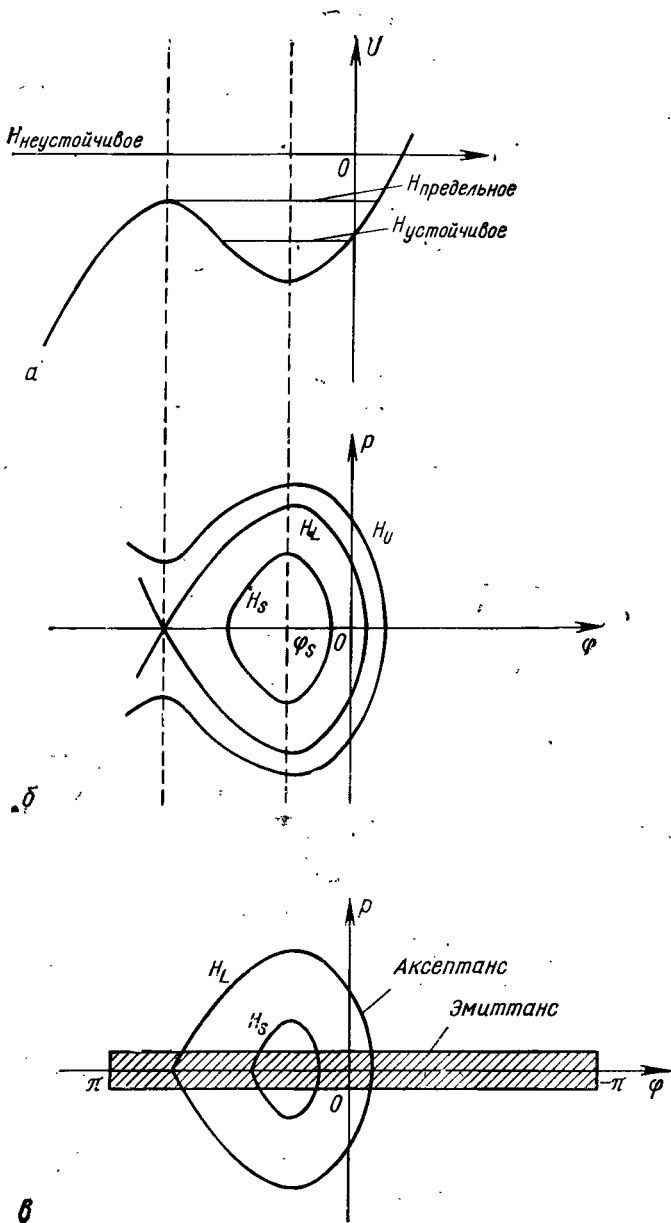


Рис. 3.1. Связь между эмиттансом пучка и акцептансом группирующей секции линейного ускорителя.

расположенных вокруг значения φ_0 , соответствующего устойчивой фазе, и простирающихся до некоторой максимальной фазы в каждом из направлений. Внутренние линии постоянного гамильтониана — почти эллипсы, соответствующие почти линейным силам, возвращающим частицу к положению равновесия. На внешних кривых сила, возвращающая частицу к положению равновесия, меньше линейной, поэтому частота колебаний меньше. Сила стремится к нулю на сепаратрисе, где значение гамильтониана или полной энергии равно экстремуму U . За сепаратрисой орбиты неустойчивы; этот случай соответствует полным энергиям, превышающим экстремальное значение U . Приведенные выше рассуждения отражены на рис. 3.1, а, б.

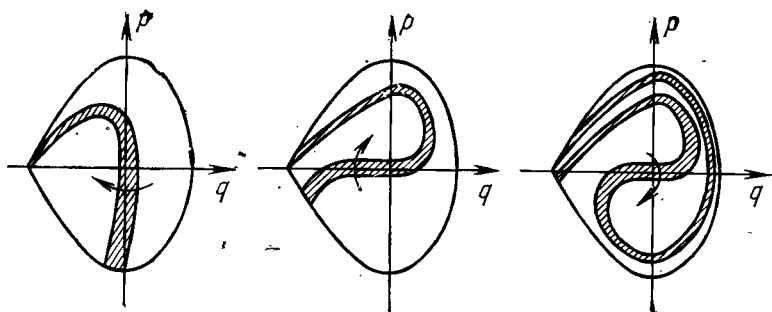


Рис. 3.2. Ниткообразование в фазовом пространстве из-за нелинейных колебаний.

За *эммиттанс* частиц примем пучок постоянного тока, который на фазовой плоскости пересекает все фазы ускоряющего поля и имеет разброс по импульсу незначительный в сравнении с разбросом по импульсу, связанным с внешними линиями постоянного гамильтониана в ускорителе. На рис. 3.1, в на кривые постоянного гамильтониана, соответствующие устойчивым орбитам, нанесен эммиттанс с несколько преувеличенным разбросом импульса. Частицы, образующие эммиттанс, входят в ускоритель за время, маленькое в сравнении с периодом фазовых колебаний. Как только они попадают в ускоритель, они могут быть описаны гамильтонианом, соответствующим линейному ускорителю, на фазовой плоскости они колеблются вдоль линий постоянного гамильтониана. Внешние частицы колеблются медленнее внутренних, и графически соответствующие колебания частиц выглядят приблизительно так, как показано на рис. 3.2. Рассматриваем только частицы, лежащие внутри предельного гамильтониана. На рисунке дана зависимость от q , а не от φ , так как координата q сопряжена с импульсом p . Соответствующие диаграммы показывают эммиттанс центральной области в конце $1/4$, $1/2$ и 1 периода соответственно. В силу теоремы Лиувилля реальная площадь, занимаемая частицами, постоянна. Однако в фазовом пространстве частицы разбросаны по значительно большей площади.

После ряда колебаний область фазового пространства разбилась на нити в такой степени, что действительное распределение частиц с большой точностью аппроксимируется распределением, найденным в результате вычисления усредненной за период плотности. Этот процесс «нитеобразования» является характеристикой колебаний частиц в негармонической потенциальной яме (см. [6] и [14]).

Эффективную плотность можно определить как плотность, определяемую усреднением за период плотности частиц в фазовом пространстве; этой эффективной плотности соответствует эффектив-

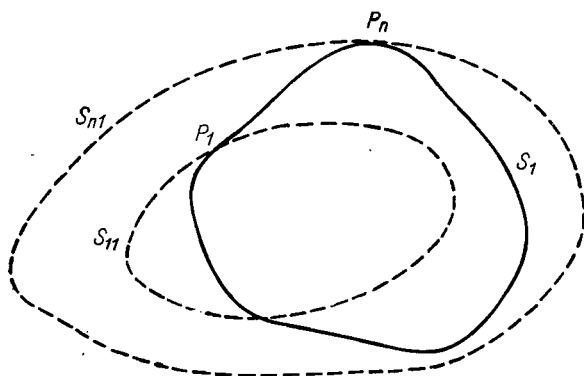


Рис. 3.3. Диаграмма, служащая подтверждением тому, что эффективное или крупнозернистое фазовое пространство эмиттанса растет после резкого изменения гамильтониана.

ная площадь — площадь, по которой происходит усреднение. Нужно отметить, что использование эффективной плотности или эффективной площади эквивалентно использованию крупнозернистого фазового пространства, в котором размер зерен велик по сравнению с нитеобразованием. Аналогичная ситуация встречается в статической механике. Докажем следующую теорему: *При любом изменении гамильтониана частицы, которое происходит за время, внаچительнó меньшее периода фазовых колебаний, эффективная площадь фазового пространства, занятого частицами, должна расти.* Начальные кривые постоянного гамильтониана и кривые постоянного гамильтониана после резкого изменения параметров представлены соответственно сплошной и пунктирной линиями на фазовой диаграмме рис. 3.3. Мы хотим доказать, что частицы на S_1 после скачкообразного изменения параметров будут ограничивать бóльшую площадь в течение их колебаний, чем они ограничивали до этого. Рассмотрим точку P_1 на S_1 : после резкого изменения параметров точка будет лежать на кривой S_{11} , либо S_{11} пересекает кривую S_1 , либо нет. Если она пересекает, тогда существует точка P_2 на S_1 , которая лежит вне S_{11} . После изменения параметров точка P_2 будет лежать на кривой S_{21} (не показана). В силу сказанного

выше S_{21} должна полностью лежать вне S_{11} . Процесс повторяется до тех пор, пока не найдется такая точка P_n , что кривая S_{n1} нигде не пересекает кривую S_1 , а касается ее в точке P_n . При условии, что кривые постоянного гамильтониана непрерывны, S_{n1} ограничивает либо большую площадь, чем кривая S_1 , либо ту же. Так как две кривые не могут быть идентичными (по предположению они описывают различные гамильтонианы), то площадь, заключенная внутри кривой S_{n1} , больше площади, ограниченной кривой S_1 , что доказывает теорему. Хотя теорема была доказана для быстрого изменения гамильтониана, может быть дана другая формулировка, в которой первоначальные контуры в фазовом пространстве представляют собой кривые постоянной фазовой плотности, а не кривые постоянного гамильтониана. Если такое начальное распределение затем подвержено гамильтоновым силам, то при условии, что кривые постоянного гамильтониана не совпадают с первоначальными контурами, эффективная плотность фазового пространства уменьшается. Это, как показано в гл. 1, эквивалентно увеличению площади фазового пространства. Именно в этой форме теорема применима к описанному выше процессу нитеобразования.

Из сказанного выше очевидно, что, для того чтобы площадь фазового пространства, в действительности занятая группой частиц, оставалась постоянной после того, как частицы прошли через систему, в которой некоторые параметры гамильтониана меняются скачком, нужно локализовать площадь фазового пространства, занятую этими частицами, внутри эффективной площади. Поэтому мы должны избегать нитеобразования, что означает *изохронную* систему, в которой частицы вращаются с некоторой угловой скоростью вдоль кривых постоянного гамильтониана. Содержание этого утверждения обсуждено в последующих параграфах.

Как видно, при перемещении группы частиц из одной колебательной системы в другую эффективная площадь фазового пространства, занятого частицами, изменится. Изменение площади эффективного фазового пространства будем называть *преобразованием фазового пространства*. Удобно также назвать площадь фазового пространства, занятого частицами первоначально, *эмиттансом*. Для колебательной системы, представленной кривыми постоянного гамильтониана на рис. 3.1, существует область, ограниченная сепаратрисой, для которой все частицы с начальными координатами внутри данной области будут совершать устойчивые колебания. Эта область фазового пространства называется *акцептансом* фазового пространства колебательной системы. Из обсуждения рис. 3.3 ясно, что если две колебательные системы обладают тождественными кривыми постоянного гамильтониана, то эффективная площадь фазового пространства сохраняется. Это тривиальный случай, в котором две системы тождественны. Однако из сказанного выше также следует, что преобразование, которое изменяет форму эмиттанса одной системы так, что все частицы, лежащие на кривой постоянного гамильтониана одной системы, также лежат на кривой постоянного гамиль-

тониана другой системы, сохраняет эффективную площадь фазового пространства. Мы уже нашли одно такое преобразование при адиабатическом изменении параметров. Для систем с линейными силами, возвращающими частицы к положению равновесия системы, существует более общий класс преобразований, которые выполняют те же функции (см. § 3.2). Этот общий процесс назовем *согласованием* в фазовом пространстве [8, 15, 17], или *согласованием* эмиттанса одной системы с аксептансом другой, причем в этом контексте аксептанс используется для обозначения формы кривых постоянного гамильтониана. Однако не обязательно эмиттансу заполнять аксептанс, наоборот, эмиттанс может быть больше аксептанса.

Распределение плотности в фазовом пространстве. В предыдущих параграфах при преобразованиях в фазовом пространстве мы не рассматривали подробно распределение плотности частиц в фазовом пространстве. Если эффективная площадь фазового пространства растет, плотность уменьшается около периферии области фазового пространства. Например, частицы, попадающие в линейный ускоритель, сначала распределены с одинаковой плотностью по всем фазам высокочастотного ускоряющего поля, но из-за их незначительного разброса по энергиям они занимают незначительную часть фазового пространства. Кривая постоянного гамильтониана, по которой частица совершает колебательное движение, зависит почти полностью от входной фазы и, таким образом, количество частиц на каждой кривой постоянного гамильтониана равно. Длины кривых постоянного гамильтониана растут по мере того, как мы удаляемся от положения устойчивой фазы, и, следовательно, эффективная плотность в фазовом пространстве (время усреднено за период колебания) пропорционально уменьшается. В общем случае, если плотность эмиттанса задается функцией $f_e(p_e, q_e)$, эффективная плотность после изменения параметров гамильтониана

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(p_e, q_e) P(p, q | p_e, q_e) dp_e dq_e, \quad (3.1)$$

где $P(p, q | p_e, q_e)$ — условная вероятность иметь импульс p и координату q после скачкообразного изменения параметров, если до этого частица имела импульс p_e и координату q_e . Оптимальная процедура согласования в фазовом пространстве заключается в том, чтобы

$$\int_{\text{аксептанс}} f(p, q) dp dq = \max,$$

т. е. чтобы максимальное число частиц попало на устойчивые орбиты. Поэтому понятно, что если мы заинтересованы в том, чтобы получить преобразование, которое будет максимизировать интеграл от плотности частиц по данной площади в фазовом пространстве, необходимо рассмотреть преобразование распределения плотности, так

же как и преобразование ограничивающего гамильтониана. Запишем для удобства преобразование (3.1)

$$\hat{f}(p, q) = g[f_e(p_e, q_e)], \quad (3.2)$$

где g — оператор преобразования от начальной плотности частиц к конечной. В общем случае преобразование g достаточно сложно. Однако, так как в случае колебательных систем мы интересуемся эффективной площадью фазового пространства, то можно упростить преобразование (3.2), вводя новую переменную ζ , которая является радиус-вектором в фазовом пространстве от положения нулевой амплитуды колебаний до кривой постоянного гамильтониана. Определим ζ так, что для $H = H_1 = \text{const}$

$$\zeta(H_1) = \text{const}. \quad (3.3)$$

Как мы увидим ниже, такая переменная удобна при усреднении плотности по времени (или фазовому углу колебаний) за один полный период колебаний. Частным типом преобразования, которое удовлетворяет (3.3), например, является преобразование к переменным угол — действие, тогда ζ определяется выражением

$$\zeta = J/\pi \quad (3.4)$$

с соответствующей угловой переменной

$$\theta = \frac{2\pi \int_{p, q} ds/\Delta H}{\oint ds/\Delta H}. \quad (3.5)$$

Если мы аппроксимируем кривые постоянного гамильтониана эллипсами, то новым переменным можно дать простую геометрическую интерпретацию с помощью старых переменных:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= (p^2/R) + Rq^2; \\ \theta &= \arcsin(q/q_m), \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

где отношение осей R определяется выражением $R = p_m/q_m$, а p_m и q_m — максимальные значения p и q . Уравнения (3.6) эквивалентны (3.4) и (3.5), в чем можно убедиться, записав

$$\frac{p^2}{R} + Rq^2 = \frac{p_m^2}{R} \cos^2 \theta + Rq_m^2 \sin^2 \theta = Rq_m^2 = \frac{J}{\pi}. \quad (3.7)$$

Все кривые постоянного гамильтониана в этой координатной системе — окружности и $\zeta(H_1) \sim q_m$, где H_1 — гамильтониан, соответствующий максимуму q , равному q_m . Фазовая плотность выражается через новые переменные обычным образом с помощью якобиана

$$\tau(\zeta, \theta) = f(p, q) (\partial(p, q)/\partial(\zeta, \theta)).$$

Интегрируя по переменной θ , которая является также фазой колебания, можно получить плотность как функцию одной переменной ζ . Это эквивалентно тому, что в конфигурационном пространстве мы получаем плотность частиц с максимальным разбросом

$$\rho(q_{\text{макс}}) = \rho(\zeta) = \int_0^{2\pi} \tau(\zeta, \theta) d\theta. \quad (3.8)$$

Мы используем этот формализм в гл. 4 при выводе условий для максимизации числа частиц, инжектируемых в различные типы ускорителей.

§ 3.2. Линейные преобразования

Введение. При линейном преобразовании

$$\mathbf{x} = [M] \mathbf{x}_1, \quad (3.9)$$

вектор \mathbf{x}_1 преобразуется в вектор \mathbf{x} с помощью матрицы

$$[M] = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix},$$

элементы которой не зависят от \mathbf{x} и \mathbf{x}_1 . Фазовая траектория линейной системы, зависящей от n переменных, т. е. с $n/2$ степенями свободы, подчиняется преобразованию типа (3.9). Рассмотрим более простой случай системы с одной степенью свободы или общий случай системы с $n/2$ независимыми степенями свободы. Такую матрицу всегда можно получить частичной диагонализацией. Тогда матрица $[M]$ сводится к виду

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & & & \\ m_{21} & m_{22} & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & m_{n-1 \ n-1} & m_{n-1 \ n} & \\ & & & m_{n \ n-1} & m_{nn} & \end{pmatrix}$$

и компоненты вектора \mathbf{x} линейно зависят от компонент вектора \mathbf{x}_1 (каждая компонента вектора \mathbf{x} выражается через две компоненты вектора \mathbf{x}_1). Для гамильтоновой системы уравнения движения для каждой пары независимых компонент вектора имеют следующий вид:

$$\dot{p} = -Fq; \quad \dot{q} = Gr. \quad (3.10)$$

Теперь, если F и G постоянны, то переменные p и q удовлетворяют тому же самому уравнению второго порядка

$$\ddot{x} + FGx = 0,$$

и эти переменные поэтому можно рассматривать как два отдельных решения для данной степени свободы. И это уравнение имеет два независимых решения, выраженных через функции синуса и косинуса. Как показано в § 1.4, матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

имеет определитель, равный 1,

$$|M| = 1. \quad (3.12)$$

Для любой кусочно-постоянной системы преобразование может быть представлено произведением матриц преобразований с определителем результирующей матрицы, равным единице. Уравнение (3.12), тесно связанное со свойствами сохранения площади фазового пространства, ограниченной траекторией частицы с постоянным гамильтонианом, сокращает число вычисляемых постоянных в преобразовании (3.11) с четырех до трех. Если преобразование обладает дополнительными свойствами симметрии, тогда они могут быть использованы для дальнейшего уменьшения числа констант. В линейных системах удобно работать с двумя типами фазового пространства: с фазовым пространством, ограниченным прямыми линиями, и с фазовым пространством, ограниченным эллипсами. Каждая из этих границ обладает хорошо известными свойствами: а) прямые линии преобразуются в прямые линии; б) эллипсы преобразуются в эллипсы. Проиллюстрируем эти свойства. Для специфического преобразования

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

с дополнительным условием, что система без трения, т. е. отсутствуют члены с производными первого порядка, из (3.12) получаем

$$ad - bc = 1. \quad (3.14)$$

Непосредственным вычислением с использованием соотношения (3.14) получаем следующее обратное преобразование:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в уравнение прямой линии $p_1 = mq_1 + n$, после некоторых преобразований снова получаем уравнение прямой линии

$$p_2 = \frac{c + md}{a + mb} q_2 + \frac{n}{a + mb}.$$

Поскольку угол наклона зависит только от начального угла наклона и не зависит от начальной точки пересечения, очевидно, что параллельные прямые преобразуются в параллельные. Аналогично для эллипса

$$(q_1^2/m^2) + (p_1^2/n^2) = 1,$$

который мы сначала запишем в более удобном виде, умножив уравнение эллипса на mn

$$\frac{n}{m} q_1^2 + \frac{m}{n} p_1^2 = mn$$

и применив преобразование (3.15):

$$\frac{n}{m} (dq_2 - bp_2)^2 - \frac{m}{n} (cq_2 - ap_2)^2 = mn. \quad (3.16a)$$

Группируя члены, получаем обычную квадратичную форму косоугольного эллипса

$$\gamma q_2^2 + 2\alpha q_2 p_2 + \beta p_2^2 = mn = \varepsilon, \quad (3.16b)$$

где $\varepsilon = J/\pi$, площадь эллипса, деленная на π . [Отметим, что значению $\varepsilon = \xi$ (как было определено раньше) здесь придается другой смысл.] Из условия отсутствия трения имеем

$$\gamma\beta - \alpha^2 = 1, \quad (3.17)$$

что можно непосредственно проверить, сравнивая (3.16a) и (3.16b) и учитывая условие (3.14). Использование эллипса в качестве границы фазового пространства имеет то преимущество, что форма эллипса может быть однозначно задана двумя числами и фазовой площадью. Один элемент полного преобразования исключается, потому что положения отдельных частиц вдоль эллипса не определены. Эллипс также образует естественную фазовую границу линейной колебательной системы.

Большую роль при решении практических вопросов играют два основных преобразования — преобразование *тонкой линзы*, которое изменяет наклон траектории пропорционально ее смещению от оси линзы и имеет вид

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

и преобразование *дрейфового промежутка*, которое изменяет положение частицы на величину, пропорциональную значению импульса. Оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Если начальное фазовое пространство задается площадью, ограниченной прямоугольником, как показано на рис. 3.4, а, то (3.18)

преобразует это фазовое пространство в фазовое пространство, показанное на рис. 3.4, б, а (3.19) — в фазовое пространство, показанное на рис. 3.4, в. Отметим, что преобразования (3.18) и (3.19) определяются одним параметром, и в этом случае симметрия границы позволяет определить полное преобразование заданием одной точки, скажем, точки a на рис. 3.4, а. Как только становится известным положение этой точки на фазовой плоскости на рис. 3.4, б или 3.4, в, точки b , c и d определяются сразу из условия симметрии. Нужно также отметить, что в случае преобразования (3.18) поло-

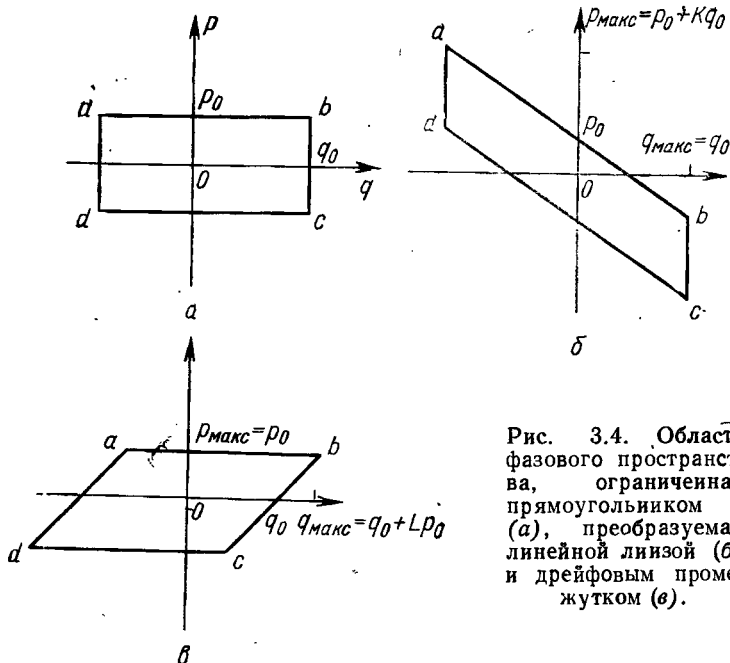


Рис. 3.4. Область фазового пространства, ограниченная прямоугольником (а), преобразуемая линейной линзой (б) и дрейфовым промежутком (в).

жение точек, находящихся на оси p , остается неизменным, как и положение точек на оси q при преобразовании (3.19). Эти непробующиеся точки облегчают графическое представление преобразования. В случае более общих преобразований, при которых мы не можем использовать свойства симметрии фазового пространства, необходимы самое большее три константы для того, чтобы описать это преобразование. Одну из этих констант можно исключить, используя эллиптические границы.

Метод эллипсов. В случае эллиптических и прямоугольных границ при рассмотрении тонких линз и дрейфовых промежутков применяются одни и те же преобразования. Относительные положения траекторий внутри фазового пространства сразу не очевидны, что вытекает из возможности представить эллиптическое преобразование двумя параметрами в противоположность трем параметрам,

которыми описывается общее преобразование (3.13), вместе с условием постоянства площади фазового пространства, что эквивалентно (3.14). Во многих случаях мы интересуемся только поведением всей площади и, чтобы описать преобразование, используем минимальное число параметров. Для описания эллиптического преобразования наиболее удобным способом исследуем различные представления эллипса.

На рис. 3.5, *a* и *b* показаны преобразования эллипса при прохождении через тонкую линзу и дрейфовый промежуток, соответствующие продольным преобразованиям на рис. 3.4, *б* и *в*. Для ясности

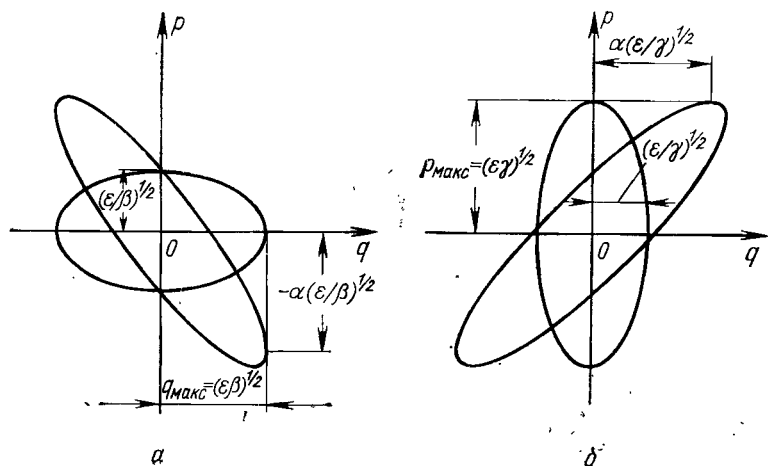


Рис. 3.5. Соотношения между параметрами, определяющими косою эллипс $\gamma q^2 + 2\alpha pq + \beta p^2 = \epsilon$ (Хирворд, 1959 г.) при прохождении через тонкую линзу (*a*) и дрейфовый промежуток (*б*).

правильные эллипсы до преобразований нанесены на рисунках с различными полуосями. Полуоси эллипсов, показанные на рисунках, могут быть непосредственно определены из квадратичной формы (3.16б)

$$\gamma q^2 + 2\alpha pq + \beta p^2 = \epsilon.$$

Пересечение с *p*-осью определяют, полагая $q = 0$, что дает $\beta p^2 = \epsilon$ или $p = (\epsilon/\beta)^{1/2}$. Находя p из условия $dq/dp = 0$, получаем $p = \alpha(\epsilon/\beta)^{1/2}$ и, подставляя это значение в (3.16б), получаем соответствующее значение $q_{\text{макс}} = (\epsilon/\beta)^{1/2}$. Эти значения показаны на рис. 3.5; *a*. Аналогичным образом для нахождения пересечения эллипса с осью *q* полагаем $p = 0$ и получаем $q = (\epsilon/\gamma)^{1/2}$, а из $dp/dq = 0$ имеем $q = \alpha(\epsilon/\gamma)^{1/2}$ и $p_{\text{макс}} = (\epsilon\gamma)^{1/2}$, эти значения показаны на рис. 3.5, *б*. Все эти соотношения могут быть использованы в случае косою эллипса общего типа, который записан ниже в нормализованных координатах. Таким образом, форма эллипса может

быть найдена независимо от его площади и поэтому ее можно выразить через введенные выше параметры. Например, можно ввести расширенное определение отношения осей, полагая

$$R = \frac{p_{\text{intercept}}}{q_{\text{max}}} = \frac{(\varepsilon/\beta)^{1/2}}{(\varepsilon\beta)^{1/2}} = \frac{1}{\beta}, \quad (3.20)$$

которое для правильного эллипса (см. рис. 3.5, а) сводится к $R = p_{\text{max}}/q_{\text{max}}$, т. е. к нашему прежнему определению. Затем определяем величину

$$X = -\frac{\alpha(\varepsilon/\beta)^{1/2}}{(\varepsilon\beta)^{1/2}} = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad (3.21)$$

которая устанавливает связь между максимальным сдвигом по p и максимальным значением q . Аналогично для преобразования, представленного на рис. 3.5, б, вводим

$$G = (\varepsilon/\gamma)^{1/2}/(\varepsilon\gamma)^{1/2} = 1/\gamma; \quad (3.22)$$

$$B = \alpha(\varepsilon/\gamma)^{1/2}/(\varepsilon\gamma)^{1/2} = \alpha/\gamma. \quad (3.23)$$

Смысл этих определений можно пояснить, рассматривая, как они меняются при заданном преобразовании. Так, для тонких линз из рис. 3.5, а и выражения (3.18) находим, что X равно R при условии, что начальный эллипс правильный. При преобразовании общего типа косоугольного эллипса через тонкую линзу получаем $R_2 = R_1$ и $X_2 = X_1 + K$.

Для дрейфовой области параметры G и B наиболее удобны, так как преобразование косоугольного эллипса через дрейфовую область дает $G_2 = G_1$ и $B_2 = B_1 + L$. Как R и X , так и G и B могут быть использованы в качестве двух параметров, описывающих форму эллипса. Использование G и B , а также R и X удобно еще тем, что они связаны простым соотношением. Запишем сначала

$$\frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{1/\beta}{1/\beta^2 + \alpha^2/\beta^2} = \frac{\beta}{1 + \alpha^2}.$$

Но из соотношения $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ имеем

$$\beta/(1 + \alpha^2) = 1/\gamma.$$

Тогда из определения G

$$G = R/(R^2 + X^2) \quad (3.24)$$

и аналогично

$$B = -X/(R^2 + X^2). \quad (3.25)$$

Если ввести комплексные обозначения

$$Z = R + jX \quad (3.26)$$

и

$$Y = G + jB, \quad (3.27)$$

то форма эллипса задается одним комплексным числом, а Z и Y связаны обычной формулой импеданса

$$Z = 1/Y. \quad (3.28)$$

Параметры импеданса показаны на фазовом эллипсе общего типа (рис. 3.6).

Техника импеданса, первоначально введенная Хирвордом [6, 7], является мощным аппаратом, так как позволяет довольно

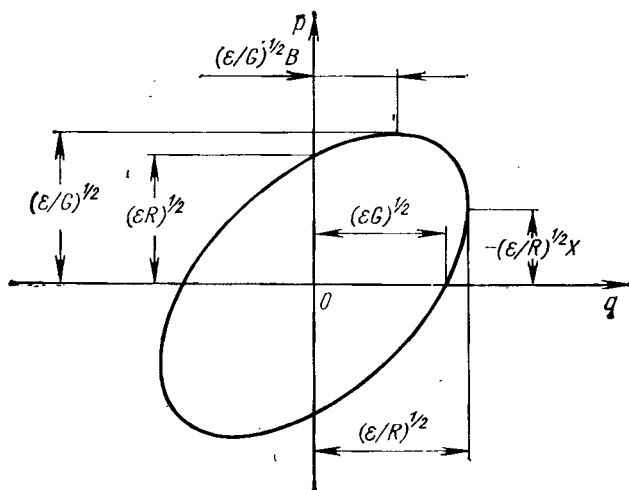


Рис. 3.6. Параметры нормированного эллипса, или параметры импеданса с $R = 1/\beta$, $X = -\alpha/\beta$, $G = 1/\gamma$ и $B = \alpha/\gamma$.

схематичную теорию приложить к непосредственному расчету требуемых линз и дрейфовых промежутков для получения желаемых преобразований. Снова к технике импеданса вернемся после того, как, используя матричную технику, введем процедуру согласования в фазовом пространстве. Здесь же только отметим, что в новых обозначениях преобразования, осуществляемые такими линзами и дрейфовыми промежутками, имеют очень простой вид:

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= Z_1 + jK; \\ Y_2 &= X_1 + jL. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Эллипс полностью определяется площадью $J = \pi a$ и либо Z , либо Y . Импеданс, или адмитанс, является параметром, описывающим форму, а площадь является масштабным параметром эллипса.

Колебания частиц в кусочно-постоянной системе. Вернемся к линейной колебательной системе, описываемой уравнениями

(3.10), в которой F и G кусочно-постоянны и которая имеет эллиптические фазовые траектории. Дрейфовый промежуток и тонкие линзы относятся к специальному случаю, для которого $F = 0$ или $F = -K\delta(t - t_0)$ соответственно. В общем случае для области с постоянными параметрами имеем

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{R} \sin \omega t \\ -R \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

где p_1 и q_1 — начальные значения и

$$\omega = (FG)^{1/2}; \quad R = (F/G)^{1/2} \quad (3.31)$$

и где использовано более узкое определение R , а именно: отношение максимального отклонения p к максимальному отклонению q . Фазовая область, ограниченная гамильтонианом данной частицы, задается интегралом действия

$$J = \oint p dq, \quad (3.32)$$

подставляя (3.30) в (3.32) и интегрируя, получаем

$$J = \pi \left[\frac{p_1^2}{R} + Rq_1^2 \right]. \quad (3.33)$$

Можно найти эффективную площадь фазового пространства, занятую частицами со всеми начальными значениями p и q , находя максимум J по отношению к p_1 и q_1 . Предположим, что все частицы первоначально колеблются вдоль кривой постоянного гамильтониана в потенциальной яме с $R = R_1$ и $\omega = \omega_1$. Если разрыв по R имеет место в момент $t = t_0$, то начальные значения p и q в системе с новыми значениями R и ω будут

$$p_1 = R_1 q_0 \sin \omega t_0; \quad q_1 = q_0 \cos \omega t_0, \quad (3.34)$$

где предполагается, что q проходит через свой максимум в момент времени $t = 0$. Подставляя (3.34) в (3.33), получаем

$$J = \pi R_1 q_0^2 \left[\frac{R_1}{R} \cos^2 \omega_1 t_0 + \frac{R}{R_1} \sin^2 \omega_1 t_0 \right]. \quad (3.35)$$

Определяя максимум J по отношению к $\omega_1 t_0$, найдем, что эффективная фазовая площадь A растет как R_1/R или R/R_1 в зависимости от того, какое из этих двух выражений больше. Данная ситуация может быть отображена графически (рис. 3.7). Эмиттанс, ограниченный s_1 , колеблется в потенциальной яме с формой аксептанса, заданной эллипсом с границей s . Эмиттанс колеблется внутри s с частотой ω , его мгновенная форма задается кривой s' . Фазовая площадь эмиттанса задается либо s_1 , либо s' , эффективная же фазовая площадь — площадь, ограниченная s .

Однако здесь мы сталкиваемся с дилеммой, возникающей из первоначального определения эффективной фазовой площади. Рассматривая преобразование фазовой площади при скачкообразном изменении параметров, мы предполагали, что все фазовые точки внутри эффективной площади образуют возможные начальные условия на этом разрыве. В случае линейных колебаний фазовое пространство первой области не заполняет всего эффективного фазового пространства второй, а как единое целое пересекает со временем все части эффективного фазового пространства. Так как второй разрыв имеет место в заданный момент времени по отношению к первому, начальное фазовое пространство локализовано в своем эффективном фазовом пространстве во второй области данным линейным преобразованием. Таким образом, для кусочно-постоянной линейной системы мы переопределяем эффективную площадь фазового пространства через конечную область системы, промежуточные же области, как считается, сохраняют знание о фазе.

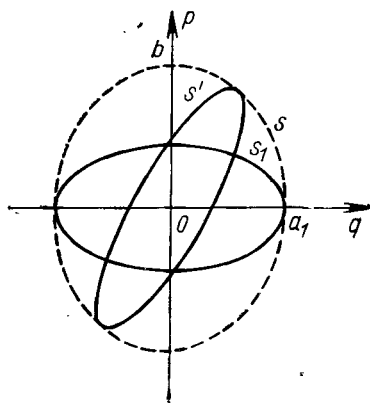


Рис. 3.7. Рост «эффективного» фазового пространства при резком изменении гамильтониана линейного осциллятора.

Именно в этом случае возможен обоснованный выбор значений фазового сдвига и отношения осей промежуточных секций для уменьшения эффективной площади фазового пространства. Эта процедура рассмотрена ниже.

Продолжим аналогию импеданса на систему с кусочно-постоянными параметрами, рассматривая преобразование через линейную систему [заданную выражением (3.30)], где преобразование q_1 и p_1 , лежащих на начальном эллипсе импеданса Z_1 , задается выражением

$$Z = R \frac{Z + jR \operatorname{tg} \omega t}{R + jZ_1 \operatorname{tg} \omega t}, \quad (3.36)$$

где Z — импеданс эллипса в конце области. Сила этой аналогии очевидна и заключается в том, что она позволяет использовать теорию электрических линий к преобразованию эллипсов фазового пространства. Роль этой аналогии станет более очевидной в следующих параграфах. Для частного случая, когда $Z_1 = R$, имеем простую графическую интерпретацию для Z (см. рис. 3.7). Эллипс s_1 с отношением осей, равным R_1 , задает фазы на входе линейной колебательной системы с акцептансом, ограниченным линией s с отношением осей, равным R . Отношение двух площадей — R/R_1 , как следует из (3.35). Замечая, что площадь эмиттанса — постоян-

ная величина, получаем тот же самый результат из (3.36) и, таким образом, для действительного Z имеем

$$A_1 = J = \pi R_1 a_1^2 = \pi R_{\text{макс}} a_{\text{мин}}^2,$$

где из (3.36) $R_{\text{макс}} = R^2/R_1$. Эффективная фазовая площадь теперь имеет следующий вид:

$$A = \pi b a_1 = \pi R_{\text{макс}} a_{\text{мин}} a_1$$

и, используя полученные выше соотношения для $a_{\text{мин}}$ и $R_{\text{макс}}$, получаем

$$A = \pi (R_{\text{макс}} R_1)^{1/2} a_1^2 = \pi R a_1^2 = (R/R_1) A_1,$$

что, как и раньше, дает рост A .

Согласование в фазовом пространстве. Мы уже обсуждали понятие согласования эмиттанта одной системы с аксептансом другой с тем, чтобы поддерживать постоянной эффективную площадь фазового пространства. Согласование между двумя системами с различным отношением осей должно осуществляться с помощью промежуточной системы, которая преобразует форму эмиттанта начальной системы в форму аксептанта конечной. Для того чтобы процесс нитеобразования не искажал эмиттанта пучка при прохождении промежуточной области, что является существенным при транспортировке интенсивных, например, пучков, промежуточное преобразование должно быть почти линейным. Из аналогии с преобразованием импеданса можно ожидать, что линейная система с длиной в $1/4$ периода будет преобразовывать эллипс эмиттанта с определенным отношением осей в эллипс аксептанта с другим определенным отношением осей. В частности, при рассмотрении трех линейных областей, вторая из которых допускает колебание в $1/4$ периода, матрица преобразования будет

$$\begin{pmatrix} q_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_3 t & \frac{1}{R_3} \sin \omega_3 t \\ -R_3 \sin \omega_3 t & \cos \omega_3 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -R_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Подставляя значения p_1 и q_1 из (3.34) в (3.37) и вычисляя площадь J в третьей области, получаем

$$J = \pi R_1 q_0^2 \left[\frac{R_2^2}{R_1 R_3} \cos^2 \omega_1 t_0 + \frac{R_1 R_3}{R_2^2} \sin^2 \omega_1 t_0 \right]. \quad (3.38)$$

Если взять

$$R_2^2 = R_1 R_3 \quad (3.39)$$

для всех $\omega_1 t_0$, то область фазового пространства будет $\pi R_1 q_0^2$, т. е. эффективная площадь фазового пространства остается без изменения. Этот результат был получен Хирвордом [6], который исходил из геометрических предпосылок, тот же самый результат

получается непосредственно из преобразования импеданса (3.30), которое для $1/4$ -волнового преобразования дает

$$Z_3 = R^2/Z_1. \quad (3.40)$$

Для правильного начального эллипса $Z_1 = R_1$ при условии, что выбрано отношение полуосей $1/4$ -волновой секции $R = R_2$, видим, что $Z_3 = R_3$, т. е. эмиттанс согласуется с акцептансом. Этот результат идентичен полученному в (3.39).

Преобразование фазового пространства на $1/4$ периода может быть осуществлено с помощью тонкой линзы и последующей дрейфовой области. Снова рассмотрим процесс фазовой группировки, который преобразует эллипс с отношением полуосей R_1 в эллипс с отношением R_3 ($R_3 > R_1$), и выведем параметры линз и дрейфовых промежутков, которые отвечают условиям согласования. Эллипс эмиттанса может быть первоначально задан в виде $R_1^2 q_1^2 + p_1^2 = p_{1\text{макс}}^2$. С помощью преобразования тонкой линзы (3.18) получаем выражение

$$R_1^2 q_2^2 + (p_2 + Kq_2)^2 = p_{1\text{макс}}^2, \quad (3.41)$$

которое является уравнением косоугольного эллипса. Находя максимум p_2 по отношению к q_2 , получаем

$$Kp_{2\text{макс}} = -(R_1^2 + K^2) q_2(p_{2\text{макс}}). \quad (3.42)$$

Исключая q_2 из (3.41), с помощью соотношения (3.42) получаем $p_{2\text{макс}}$ как функцию $p_{1\text{макс}}$. Однако из теории $1/4$ -волнового преобразователя известно, что

$$p_{2\text{макс}} = (R_3/R_1)^{1/2} p_{1\text{макс}}.$$

Это соотношение вместе с полученными выше результатами определяет силу линз, которая дает соответствующее $p_{2\text{макс}}$:

$$K = R_1 R_3 - R_1^2. \quad (3.43)$$

Можно найти значение L , которое преобразует косоугольный эллипс в прямой с новым соотношением полуосей, отмечая, что это имеет место, если $q_3 = 0$ при $p_3 = p_{2\text{макс}}$. Применяя дрейфовое преобразование (3.19), получаем

$$q_3 = Lp_2 + q_2.$$

Полагая

$$L = -q_2(p_{2\text{макс}})/p_{2\text{макс}},$$

комбинируя с (3.42) и подставляя вместо K выражение (3.43), получаем

$$L = (R_1 R_3 - R_1^2)^{1/2} / (R_1 R_3). \quad (3.44)$$

Уравнения (3.43) и (3.44) дают параметры тонких линз и дрейфовых промежутков, эквивалентных $1/4$ -волновому преобразователю,

в случае согласования эллипса эмиттанса с соотношением полуосей R_1 и эллипсом аксептанса с соотношением полуосей R_3 .

Если начальный и конечный эллипсы имеют значения импеданса Z_1 и Z_2 и не являются правильными эллипсами, необходимы более сложные преобразования. Эти преобразования больше соответствуют изучению поперечного фазового пространства, чем продольного. В принципе согласование может быть выполнено просто с использованием теории импеданса. Всегда бывает достаточно вращения эллипса, представленного электрической линией, и вытягивания, представленного реактивным сопротивлением или проводимостью. Последнее всегда может быть получено с помощью линз и дрейфовых промежутков, но вращение нельзя в общем случае непосредственно осуществить. Как показано в следующем параграфе, для этого нужно использовать дополнительные дрейфовые промежутки и линзы. Однако дополнительные элементы значительно усложняют преобразование, снижая, таким образом, ценность этого метода.

§ 3.3. Поперечные фазовые преобразования пучков

Введение. Одним из важных приложений динамики частиц в фазовом пространстве является определение путей частиц при прохождении через фокусирующую систему и оптимизация этих путей; например, нас может интересовать прохождение частиц с выхода ускорителя до апертуры мишени или прохождение частиц от эмиттера рентгеновской трубки до коллектора. Эти приложения, вообще говоря, характеризуются наличием двух выделенных степеней свободы, двух направлений, перпендикулярных оси фокусирующей системы, относительные положения частиц вдоль оси не имеют значения. Обычно интерес представляет транспортировка максимального числа частиц с ограничением либо поперечных размеров пучка, либо углового расхождения для различных положений вдоль оси и получение оптимальной формы фазового пространства на выходе фокусирующей системы. Обсудим процедуру оптимизации более подробно.

Имеется обширная литература о согласовании в поперечном фазовом пространстве как в применении к оптике статических пучков, так и для динамических проблем ускорителей. Обсуждение теории ускорителей дано в гл. 4. Проблемы оптики пучков обсуждаются главным образом в этом параграфе и в § 3.5 и 3.6. Для более полного изучения проблем оптики пучков высокой энергии рекомендуем читателю обратиться к обзорной статье [12] и к монографии [23].

Выбор переменных. В качестве независимой переменной мы до сих пор брали время, а координату и ее канонический импульс — как зависимые переменные. Часто в качестве независимой переменной удобно брать не время, а расстояние вдоль центральной траектории или оси. В качестве независимой переменной естественно выбирать положение на оси, так как внешние силы обычно выражены

через расстояние вдоль оси. Так, линза установлена в пространстве так, что силы сразу же записываются в виде функции от независимой переменной s (измеренной вдоль оси), тогда как сила записывается в виде функции от t только тогда, когда известна скорость. В случае вычисления возмущения орбиты, как, например, в ускорителях, скорость без труда можно определить вдоль равновесной орбиты, но так бывает не всегда. Однако даже в тех случаях, когда можно определить скорость равновесной частицы v_0 , как, например, в ускорителях с жесткой фокусировкой, силы более естественно представить в системе, где в качестве независимой переменной выбрано расстояние. Мы уже показали, что если имеется функциональная зависимость $t = t(s)$, то уравнения Гамильтона принимают вид

$$dp_i/ds = -\partial K/\partial q_i; \quad dq_i/ds = \partial K/\partial p_i, \quad (3.45)$$

где $K = K(p, q, t)$ — новый гамильтониан системы. K больше не имеет размерности энергии, но, как мы показали, теорема Лиувилля применима к переменным q, p . Поэтому далее до конца параграфа будем использовать s в качестве независимой переменной.

Можно также преобразовать зависимые переменные к новой группе канонических переменных, которые подчиняются уравнениям (3.45). В § 1.1 приведена формальная процедура преобразования от одной группы канонических переменных к другой. Для поперечных фазовых пространств пучков удобной группой переменных являются координата q и угол расходимости

$$\theta = p/(mv_0), \quad (3.46)$$

т. е. угол между лучом и осью. Площадь фазового пространства дается выражением

$$J = \oint p dq = \oint mv_0 d\theta dq, \quad (3.47)$$

и при условии, что масса m и скорость v_0 вдоль центральной траектории постоянны, две фазовые площади связаны постоянным фактором, поэтому новые переменные можно считать каноническими. Аналогично в гл. 4 мы увидим, что продольные колебания в линейном ускорителе наиболее удобно определяются по отклонению фазы частицы от положения устойчивой фазы

$$\varphi = \omega q/v_0, \quad (3.48a)$$

и отклонению энергии от энергии, соответствующей устойчивой фазе (полученной из первого порядка теории возмущений),

$$E = v_0 p, \quad (3.48b)$$

где ω — частота высокочастотного ускоряющего поля. Таким образом, образуя область фазового пространства, как в (3.47), мы видим, что при условии постоянства ω , E и φ также можно рассматривать в качестве канонических переменных.

Линейные линзы. Рассмотрим два основных типа линз: линзы первого типа, которые описываются двумя независимыми координатами, скажем, x и y с их сопряженными импульсами p_x и p_y ; линзы второго типа — *цилиндрически симметричные линзы* с координатами r и θ , каноническими импульсами $p_r = mr$ и $p_\theta = mr^2\dot{\theta} + eA_\theta$. Для линз первого типа можно рассмотреть фазовое пространство для каждой степени свободы отдельно, мы назовем их *одномерными линзами*. Для линз второго типа переменная θ — циклическая в гамильтониане, т. е. $H = H(r, p_r, p_\theta)$, и, таким образом, можно записать все соотношения для линзы через одну переменную положения r , но r и θ — фазовые плоскости, связанные через выражение для p_θ .

Квадрупольная линза. Наиболее распространенным примером линзы первого типа является квадрупольная линза (см. [18]), которая может быть либо магнитной, либо электрической. Для магнитного квадрупольного поля с гиперболическими полюсными наконечниками поля во внутренней области задаются выражениями

$$B_x = Cy; \quad B_y = Cx. \quad (3.49)$$

Сила Лоренца в парааксиальном приближении $v_z = v_0$:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -ev_z B_y = -ev_0 Cx; \\ F_y &= ev_z B_x = ev_0 Cy. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Видим, что компоненты силы пропорциональны постоянным градиентам поля $\partial B_y/\partial x = \partial B_x/\partial y = C$ и смещению от оси, поэтому они и являются линейными. Отметим, что на оси поле равно нулю; таким образом, для полей с другой формой, но с той же симметрией разложение поля в ряд Тейлора для области, близкой к оси, дает тот же результат. Уравнение движения вдоль x -направления с силами, задаваемыми выражениями (3.50), имеет вид $\ddot{p}_x = -ev_0 Cx$ или, выражая через независимую переменную $s = z$, подставляя $p_x = ms \frac{dx}{ds}$ и $v_0 = \dot{s}$, получаем

$$(d^2 x/ds^2) + k^2 x = 0, \quad (3.51)$$

где

$$k^2 = eC/mv_0 = (1/Br) (\partial B_y/\partial y). \quad (3.52)$$

Здесь использовано общепринятое обозначение для магнитной жесткости $Br \doteq mv_0/e$. Когда C положительна, k^2 также положительна; в этом случае имеем простое гармоническое движение с решением

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ks & \frac{1}{k} \sin ks \\ -k \sin ks & \cos ks \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

где $x' = dx/ds$ — определенная ранее переменная угловой расходимости. Видим, что (3.53) после соответствующей замены перемен-

ных идентично с полученным раньше решением (3.30) пары гамильтоновых линейных уравнений. Для этого выбора переменных отношение полуосей и частота, которые сводятся к k , играют двойную роль. Это равенство R и $k = \omega/v_0$ в общем случае, как показано в гл. 2, не выполняется для систем с переменными параметрами. Если в (3.53) уменьшим ks и увеличим k так, что в пределе $k^2s = K - \text{константа}$, то получим приближение тонкой линзы для (3.19), которое запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'_1 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

где $1/f$ — величина, обратная фокусному расстоянию. Покажем соответствие $1/f$ и K , находя дрейфовую длину $l = f_0$, необходимую, чтобы свести x к нулю для частицы с $x'_1 = 0$. Умножая (3.54) (для $1/f = k$) на дрейфовое преобразование

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}, \quad (3.54a)$$

получаем для $x'_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с решением для $x = 0$ ($l = f$)

$$f = 1/K,$$

которое нам дает (3.54).

Для плоскости y соответствующее уравнение движения

$$(d^2 y/ds^2) - k^2 y = 0 \quad (3.55)$$

с неколебательным решением

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } ks & \frac{1}{k} \text{sh } ks \\ k \text{sh } ks & \text{ch } ks \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

что эквивалентно рассеивающей линзе. Таким образом, хотя динамические переменные независимы в каждой фазовой плоскости, силы связаны и процедура оптимизации должна принимать в расчет одновременно оба направления. Если один квадруполь фокусирует только в одной плоскости, пара квадруполей может фокусировать в обеих плоскостях. Из формулы тонкой линзы для фокусного расстояния пары линз имеем

$$1/f = 1/f_1 + 1/f_2 - d/f_1 f_2, \quad (3.57)$$

где d — расстояние между линзами. Если f_1 и f_2 равны и имеют противоположные знаки (одна линза фокусирующая, другая дефокусирующая), то фокусное расстояние пары линз дается выражением

$$1/f = d/\|f_1 f_2\|,$$

и система из двух линз всегда фокусирующая.

Цилиндрически симметричная линза. Если использовать комплексную переменную

$$\zeta = x + iy = r \exp(i\theta) \quad (3.58a)$$

для частицы, двигающейся по спирали в магнитном поле, то уравнения вдоль x - и y -направлений можно объединить (Херманн, 1958 г.):

$$\ddot{\zeta} + 2i\omega_l \dot{\zeta} + i\omega_l \zeta = 0, \quad (3.59)$$

где $\omega_l = eB/2m$ — ларморова частота вращения вокруг оси симметрии. Если перейти к координатной системе, вращающейся вокруг оси с ларморовой частотой

$$\dot{\theta}_l = \dot{\theta} - \omega_l,$$

и если ввести новую комплексную переменную ρ

$$\zeta = \rho \exp \left[i \int_0^t \omega_l(t) dt \right], \quad (3.58b)$$

то уравнение (3.59) сводится к уравнению гармонического осциллятора

$$\ddot{\rho} + \omega_l^2 \rho = 0. \quad (3.60)$$

В ларморовой системе координат магнитное поле выступает как центральная притягивающая сила величины — $m\omega_l^2 r$. Так как сила центральная, θ -координата не входит в гамильтониан явно, и канонический угловой момент сохраняется:

$$l = \dot{\theta}_l r^2 - (\dot{\theta} - \omega_l) r^2 = \text{const}. \quad (3.61)$$

Отметим, однако, что как координата x , так и y в одинаковой степени уменьшаются при уменьшении r . Если в цилиндрической системе обе координаты выбраны с размерностью длины, т. е. θ -координата задана через θr , то очевидно, что θr меняется линейно с r и, таким образом, как p_r , так и p_θ меняются обратно пропорционально r , сохраняя постоянный соответствующий объем в четырехмерном фазовом пространстве.

Если в (3.60) заменить независимую переменную t на s , то, как и в преобразовании, приводящем к (3.51), получаем

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} + k^2 \rho = 0.$$

В параксиальном приближении (аксиальная скорость постоянна) $k = \omega/v_0$ — константа, матричные преобразования и фокусирующие свойства, описанные для квадрупольных систем, здесь также выполняются. Поэтому оба типа линз можно рассматривать одновременно с точки зрения фазовых эллипсов, помня, однако, об основных различиях.

Изображения и профили пучков в системах с линейными линзами. Рассмотрим фазовое преобразование системы линза — дрейфовый промежуток

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix},$$

где в качестве независимой переменной взято расстояние вдоль оси линзы. Если мы преобразуем один правильный эллипс в другой с определенным изменением отношения полуосей, как описано

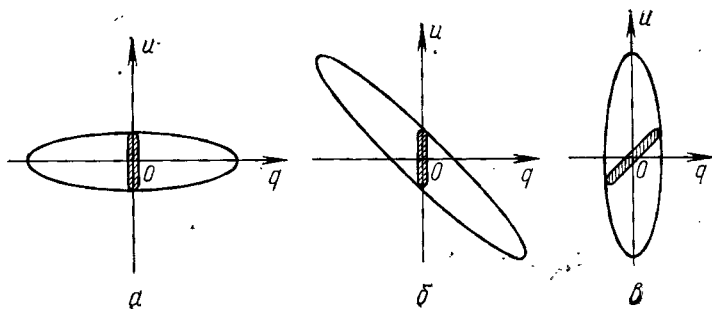


Рис. 3.8. Преобразование фазового пространства для системы линза—дрейфовый промежуток: до линзы (а), после линзы (б), после дрейфового промежутка (в).

в § 3.2, то получим эллипс, как показано на рис. 3.8. Эллипсы даны до линзы, после линзы и после дрейфового промежутка, где взято произвольное изменение R . Тонкая заштрихованная область является изображением частиц, которые вылетают из одной точки в центре объекта. Отметим, что изображение не формируется на фазовой плоскости v (см. рис. 3.8), т. е. заштрихованная линия не преобразовалась в другую линию $q = \text{const}$, которая является изображением фокуса. В действительности в дрейфовой области отсутствует такая точка, которая является изображением фокуса, что согласуется с обычным понятием оптики, согласно которому объект, расположенный перед линзой, можно сфокусировать только на бесконечности.

Однако для системы дрейфовый промежуток — линза — дрейфовый промежуток может быть получено истинное изображение. Результаты такого преобразования показаны на рис. 3.9. В конфигурационном пространстве начерчено несколько типичных лучей

системы и показано преобразование двумерного фазового пространства для характерных точек вдоль оси. Фазовое пространство отображается как эллипсом, так и прямоугольником, ограничивающим эллипс. Если объект имеет симметричное фазовое пространство, то, как видно, при заданной угловой расходимости правильный эллипс будет иметь место на расстоянии, немного меньшем того, на котором образуется изображение. И, наоборот, если мы рассмотрим в качестве объекта часть фазового пространства, имеющего форму изображения, то, так как лучи обратимы, мы можем прийти к образу, который имеет симметричное распределение. Здесь, хотя мы и получили фокус, плоскость изображения и плоскость наи-

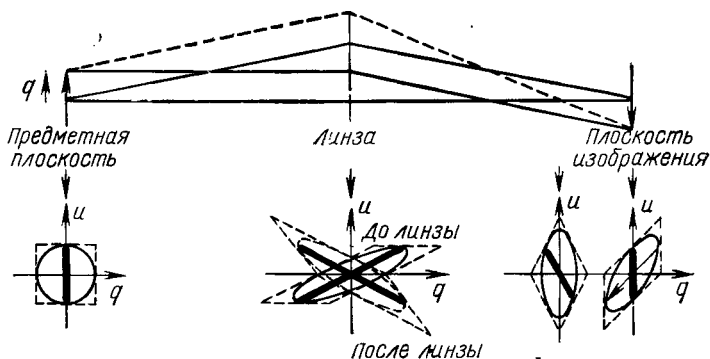


Рис. 3.9. Преобразование фазового пространства для системы дрейфовый промежуток—линза—дрейфовый промежуток.

меньшего разброса частиц по координатам не совпадают. Положение наименьшего разброса частиц по координатам или максимальной концентрации частиц часто называют *перетяжкой*, или *кроссовером*.

Рассмотрим с несколько иной точки зрения соотношение между кроссовером пучка, огибающей пучка и точкой изображения. Огибающая пучка, описываемая эллиптической фазовой границей в дрейфовой области, представлена на рис. 3.10. Запишем уравнение эллипса в дрейфовой области в виде

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon, \quad (3.62)$$

где в (3.166) p заменен на x' и q — на x . Все соотношения, выведенные раньше, исходя из понятий импеданса пучка, приложимы к новым координатам. Можно считать, что огибающая пучка состоит из двух частей. Половина ширины кроссовера $x_w = x_{\text{макс}}$ (правильный эллипс) может быть получена (см. рис. 3.5) через коэффициенты (3.62) и преобразована к параметрам импеданса (3.22), в результате чего, как и на рис. 3.6, получаем

$$x_w = (\epsilon/\gamma)^{1/2} = (\epsilon G)^{1/2}. \quad (3.63)$$

Часть, появляющаяся при преобразовании импульса к разбросу пучка $x_p = x's$, получается из рис. 3.5, б и 3.6:

$$x_p = (\varepsilon\gamma)^{1/2} s = (\varepsilon/G)^{1/2} B. \quad (3.64)$$

Огибающая пучка x_e является суммой квадратов двух компонент:

$$x_e^2 = x_w^2 + x_p^2 = \varepsilon \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma s^2 \right) \quad (3.65)$$

или, если ввести параметры импеданса,

$$x_e^2 = \varepsilon \left(G + \frac{B^2}{G} \right). \quad (3.66)$$

Эти соотношения показаны на рис. 3.10.

Однако соотношения импеданса не достаточны, чтобы определить положение отображения. Это ясно из того факта, что мы описали эллипс двумя параметрами, в то время как для определения положения отдельных частиц необходим третий параметр.

Полезна другая формулировка динамики пучка — непосредственно через огибающую пучка. Эта формулировка развивалась Уэлшем (1963 г.) и другими. Мы можем связать огибающую x_e и ее производную $x_e' = dx_e/ds$ с функциями эллипса β и α . Из соотношения (3.65), меняя s на α/γ , т. е. на ее значение в дрейфовой области, получаем

$$x_e = \varepsilon^{1/2} \left(\frac{1 + \alpha^2}{\gamma} \right)^{1/2} = (\varepsilon\beta)^{1/2}, \quad (3.67)$$

где использовано определение γ из (3.17). Аналогично для производной после некоторых вычислений получаем

$$x_e' = \varepsilon^{1/2} \left(\frac{1 + \alpha^2}{\gamma} \right)^{1/2} \gamma s = \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^{1/2} \alpha. \quad (3.68)$$

Отметим, что второе свойство можно было бы получить непосредственно из рис. 3.5, б. Из (3.67) видно, что β — функция амплитуды движения, так что для данной группы начальных условий (фиксированное ε) величина огибающей выражается непосредственно через $\beta^{1/2}$. Подставляя результаты (3.67) и (3.68) в общее уравнение эллипса (3.62), получаем

$$\varepsilon\gamma x^2 + 2x_e x_e' x x' + x_e^2 x'^2 = \varepsilon^2, \quad (3.69)$$

где $\gamma^{1/2}$ — максимальное угловое отклонение, которое с использованием параметров огибающей из (3.67) и (3.68) и определения γ из (3.17) может быть выражено

$$\gamma = (\varepsilon/x_e^2) + (x_e'^2/\varepsilon). \quad (3.70)$$

На рис. 3.11 дан фазовый эллипс, записанный через параметры огибающей. Можно найти дифференциальное уравнение для функции огибающей, подставляя (3.70) в (3.69),

$$(x_e' x - x_e x')^2 + \varepsilon x^2/x_e^2 = \varepsilon.$$

Дифференцируя это выражение по s

$$2(x_e' x - x_e x')(x_e'' x - x_e x'') - (2\varepsilon^2 x/x_e^3)(x_e' x - x_e x') = 0$$

и сокращая на общий множитель, получаем

$$x x_e'' - x_e x'' - \varepsilon^2 x/x_e^3 = 0. \quad (3.71)$$

Для дрейфовой области $x'' = 0$ после упрощений (3.71) принимает вид

$$x_e'' - \varepsilon^2/x_e^3 = 0, \quad (3.72)$$

это дифференциальное уравнение только для x_e . Можно обобщить (3.72) на линейную систему, где уравнение для сил не содержит

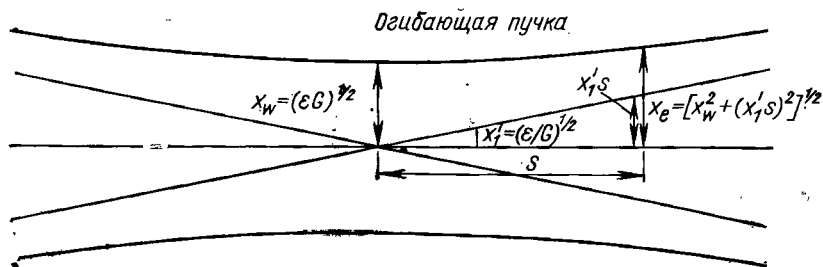


Рис. 3.10. Связь между огибающей пучка, траекторией луча и параметрами эллипса в дрейфовой области.

члены, пропорциональные первым производным. Тогда

$$x_e'' \pm k^2 x_e = 0 \quad (3.73)$$

(уравнение, описывающее квадруполь в линейном приближении) и, подставляя значение x'' в (3.71), мы получаем более общий результат

$$x_e'' \pm k^2 x_e - \varepsilon^2/x_e^3 = 0, \quad (3.73a)$$

где $\pm k$ взято соответственно для фокусирующих и дефокусирующих линз. Эффект сильной фокусировки, обусловленный при малых x_e третьим членом, препятствует пересечению оси, что физически вытекает из того факта, что $x_e(\min) = x_w$.

Важным свойством огибающей является то, что она может быть образована из любых двух независимых траекторий, известных как сопряженные траектории. Например, для колебаний частиц в кусочно-линейной системе, о которой говорилось в § 3.2, в качестве сопряженных траекторий можно взять движение двух частиц, которые первоначально находятся в точках q_{\max} и p_{\max} правильного эллипса. Эти траектории в действительном пространстве даются уравнениями ($x = q$)

$$x_q = x_0 \cos ks$$

и

$$x_p = x_0 \sin ks,$$

так что огибающая всех траекторий описывается выражением

$$x_e^2 = x_0^2 = x_q^2 + x_p^2.$$

Это уравнение всегда верно для независимых траекторий. Мы не будем выводить его для общего случая, но покажем, что оно также действительно для различных типов движения, в частности, для

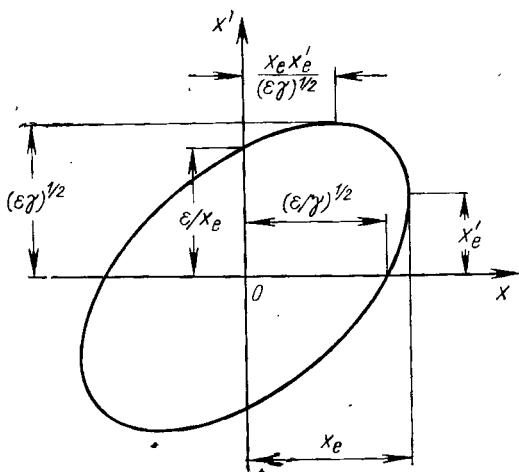


Рис. 3.11. Фазовый эллипс, представленный через параметры огибающей.

частицы в дрейфовой области. Это можно более отчетливо увидеть, рассматривая параметры косоугольного эллипса на рис. 3.5, а, б, из которых следует

$$x_q = (\epsilon/\gamma)^{1/2}; \quad x'_{\max} = (\epsilon\gamma)^{1/2}$$

для правильного эллипса с

$$x_p = x'_{\max} s \doteq (\epsilon/\gamma)^{1/2} \alpha,$$

так что

$$x_q^2 + x_p^2 = \epsilon \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{\gamma} \right) = \epsilon\beta = x_e^2. \quad (3.736)$$

Устойчивость, фазовое пространство и огибающая периодически фокусируемого пучка. В предыдущем пункте мы видели, что два квадрупольных одинаковой силы, один из которых фокусирующий и другой дефокусирующий, с дрейфовым пространством между ними образуют фокусирующую систему. Если взять группу таких фокусирующих систем, их комбинация может образовать (а может и не образовать) устойчивую фокусирующую систему. Комбинация из

двух линз и дрейфовых промежутков между ними, образующая элемент периодической системы, обозначается FODO: фокусировка, нулевое поле, дефокусировка, нулевое поле. Этот основной элемент легко представить в матричной форме умножением четырех соответствующих матриц:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} kl_1 & \frac{1}{k} \operatorname{sh} kl_1 \\ k \operatorname{sh} kl_1 & \operatorname{ch} kl_1 \end{pmatrix} \times \quad (3.74) \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos kl_1 & \frac{1}{k} \sin kl_1 \\ -k \sin kl_1 & \cos kl_1 \end{pmatrix}.$$

Элемент может иметь другие начальные и конечные точки, например, если их брать симметрично относительно фокусирующей или дефокусирующей линзы, то границы устойчивости не изменятся. Матрицы для этих комбинаций более сложные, так как имеют две полулинзы вместо линзы, но дополнительная симметрия всегда желательна.

Дифференциальное уравнение движения одной частицы через периодическую систему можно записать в виде

$$x'' + K(s)x = 0. \quad (3.74a)$$

Для FODO-системы, выбирая начало в точке $s=0$, имеем в случае $K(s)$

$$K(s) = \begin{cases} k^2 & 0 < s < l_1 \\ 0 & l_1 < s < l_1 + l_2 \\ -k^2 & l_1 + l_2 < s < 2l_1 + l_2 \\ 0 & 2l_1 + l_2 < s < 2l_1 + 2l_2 \end{cases}$$

и $K(s) = K(s + 2l_1 + 2l_2)$. Можно также выбрать другой, более простой вид для матрицы периода. Например, периодическую систему можно представить состоящей из фокусирующего и дефокусирующего квадрупольей без дрейфового промежутка. Это упрощенная квадрупольная фокусирующая система исследуется более детально в § 4.1, где рассматриваются бетатронные колебания в ускорителях. Устойчивость таких систем анализировалась в работе [2] при рассмотрении движения частиц в синхротроне с переменными градиентами и с тех пор интенсивно изучалась в приложениях к ускорителям. Другая простая периодическая система состоит из серии коротких симметричных магнитосоленоидальных линз. Их можно расположить так, что либо магнитное поле каждой линзы имеет то же направление, что и остальные линзы, расположенные на некотором расстоянии друг от друга вдоль направления

поля (в этом случае периодическое магнитное поле изменяется резко между некоторым данным значением и нулем), либо направления полей меняются. Такие симметричные системы нашли широкое распространение при фокусировке пучков малой энергии в различных приборах, например, в лампах бегущей волны [20]. Однако анализ на устойчивость наиболее полно был выполнен для систем (с переменными градиентами) типа квадруполь, используемых в ускорителях. В таких системах устойчивость существенна. Теперь рассмотрим периодическую систему общего типа, удовлетворяющую (3.74а).

В § 1.4 мы уже рассматривали устойчивость уравнения с периодическими коэффициентами. Мы нашли, что преобразование на период можно записать в виде

$$x(s+L) = x(s)\exp(\pm i\sigma),$$

где

$$2 \cos \sigma = a + d$$

— след матрицы преобразования, такой, как, например, дан в (3.74). Таким образом, для $-2 < a + d < 2$ мы имеем устойчивую систему. Так как значение σ определяет устойчивость системы, оно не должно зависеть от начальной и конечной точек матрицы. Однако величина $x(s)$ должна непрерывно изменяться с изменением s , но так, чтобы условие периодичности удовлетворялось. Такими независимыми решениями будут

$$x(s) = \omega(s) e^{\pm i\psi(s)}, \quad (3.74б)$$

тогда

$$\omega(s) = \omega(s+L) \quad \text{и} \quad \int_s^{s+L} e^{i\psi(s)} ds = e^{i\sigma}.$$

Решение это является общим видом решения Флоке [4] уравнения с периодическими коэффициентами, которое широко использовалось при анализе ускорителей (см., например, обзор [3]). Если продифференцировать (3.74б) дважды и подставить результат в (3.74а), то после сокращения на $e^{i\psi}$ и приравнивания действительных и мнимых частей получим

$$\omega'' - \omega\psi'^2 + K(s)\omega = 0$$

и

$$2\omega'\psi' + \omega\psi'' = 0.$$

Переписывая второе уравнение в виде

$$(2\omega'/\omega) + (\psi''/\psi') = 0$$

и интегрируя его, получаем

$$\psi' = 1/\omega^2.$$

Подставляем это значение вместо ψ' в уравнение для ω'' :

$$\omega'' - (1/\omega^3) + K(s)\omega = 0.$$

Сравнивая это выражение с уравнением для огибающей пучка, видим, что они идентичны, причем $\omega = x_e$ и $K(s)$ — силовая функция, которая оправдывает использование ранее k^2 в уравнении огибающей для линзы. Мы также нашли из диаграммы эллипса [см. также уравнение (3.736)], что $x_e^2 = \epsilon\beta$; таким образом, если нормировать решение так, что $\epsilon = 1$, то из (3.746) получим общее периодическое решение

$$x = \beta(s)^{1/2} \cos\left(\int \frac{ds}{\beta(s)} + \delta\right), \quad (3.75)$$

где вместо ψ подставлено значение его и введен произвольный фазовый фактор, чтобы учесть два решения. Нормализованная огибающая пучка дается выражением $\beta(s)^{1/2}$ и действительная траектория

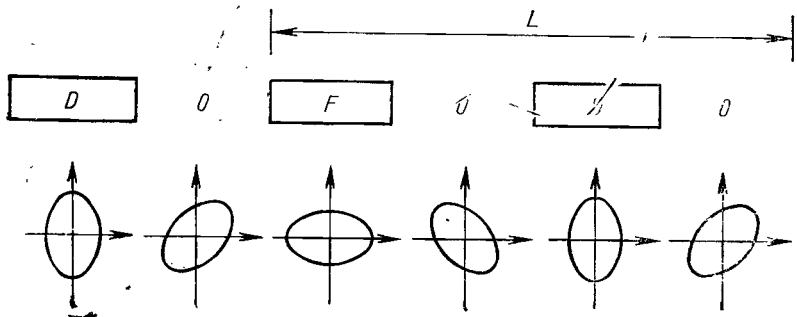


Рис. 3.12. Преобразование эллипса в периодической фокусирующей системе

частицы определяется колебаниями фазовой функции внутри огибающей. Общий вид фазовых элементов, соответствующих FODO-периодической системе, показан на рис. 3.12.

Нелинейные линзы — оптическая аналогия. Для траекторий, имеющих большие углы с осью, преобразование не имеет матричного представления. Как и в лучевой оптике, преобразования, которые описывают абберации, могут быть очень сложными. Фазовое представление, однако, в силу того, что дает дополнительное измерение, помогает понять форму отображения. Для того чтобы рассмотреть линзу, в которой абберация может быть получена графически очень просто, рассмотрим в качестве примера оптическую аналогию, а именно, рассмотрим сферическое зеркало, на поверхность которого лучи падают под большими углами по отношению к центральному лучу. На рис. 3.13 нанесено несколько типичных лучей от объекта, находящегося на расстоянии u от центра зеркала, которое в отсут-

ствии aberrации образует изображение на расстоянии v от центра. Объект простирается между $\pm x_1$, в то время как лучи расходятся под углами в пределах $\pm x'_1$. Фазовое пространство объекта нанесено ниже, нанесены также характерные граничные лучи. Лучи A , C и D проведены от объекта до фокуса. Дано также фазовое пространство частиц в плоскости изображения. Для сравнения также представлены фазовые точки тех лучей изображения, которым соответствует половинный угловой разброс (пунктирная линия); видно, что эти лучи почти пришли в фокус; хотя угловой разброс и не минимальный.

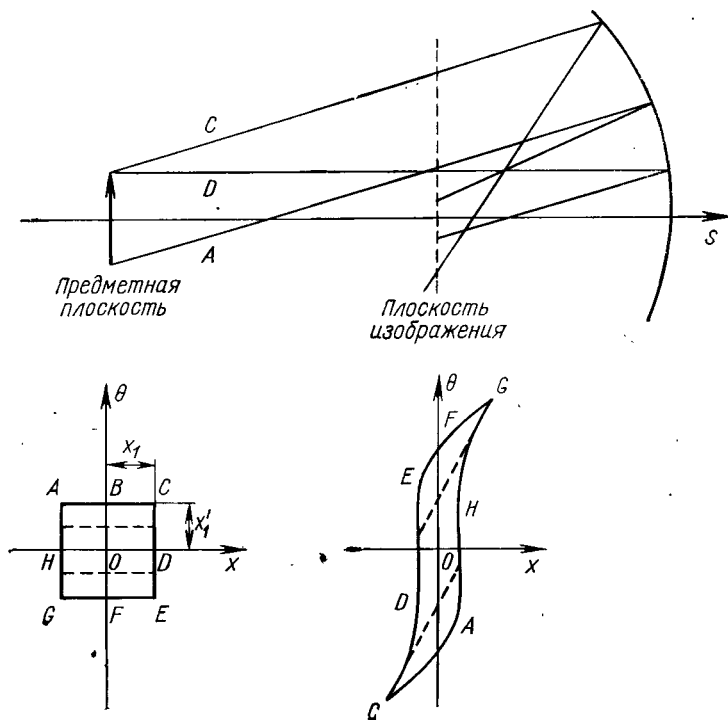


Рис. 3.13. Преобразование фазового пространства от плоскости объекта до плоскости изображения для нелинейной линзы.

Преимущество диаграммы в фазовом пространстве заключается в том, что избыток пересекающихся лучей в конфигурационном пространстве в фазовом пространстве размывается так, что траектории остаются раздельными. Также очевидно, что существует преобразование (хотя не обязательно реализуемое), которое преобразует фазовое пространство в плоскости изображения либо в сфокусированное изображение, либо в фазовое пространство, которое минимизирует произведение максимального положения и угловых разбросов.

§ 3.4. Преобразования продольного фазового пространства. Нелинейные эффекты

Введение. В § 3.3 рассмотрены преобразования фазового пространства, поперечного к главному направлению движения частицы. Положение отдельной частицы на траектории считалось одинаковым для всех частиц, расстояние вдоль траектории выступало в качестве независимой переменной, связанной со временем скоростью v_0 , которая принималась общей для всех частиц. Согласование поперечного фазового пространства в этом случае осуществлялось с помощью статических линз, расположенных вдоль траектории частицы.

Согласование продольного фазового пространства существенно отличается от согласования поперечного фазового пространства, так как оно осуществляется линзами с высокочастотными (ВЧ) полями, применение которых обусловлено тем, что равновесная фаза (т. е. фазово-устойчивое положение относительно некоторого ускоряющего ВЧ поля, около которого частицы группируются по фазе и энергии) сама движется вдоль траектории. Следовательно, группирующие поля должны либо двигаться с равновесной (фазово-устойчивой) частицей, либо быстро прикладываться в такой момент, чтобы возле равновесного положения возникали группирующие силы.

Четвертьволновой преобразователь, например, состоит из бегущего продольного электрического поля, величина которого линейно связана с фазой частицы; при равновесном положении величина поля становится равной нулю. Затем поле периодически повторяется. Такое поле представляет собой пилообразную волну, которую можно разложить на фурье-компоненты следующим образом:

$$\mathcal{E} = \frac{2\mathcal{E}_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sin n\varphi,$$

где φ — фаза относительно равновесного положения, а \mathcal{E}_m — максимальное поле. Так как на практике ВЧ поля синусоидальны, мы должны аппроксимировать линейные поля синусоидой. Для анализа продольного фазового пространства будем предполагать, что реальная система аппроксимируется только первым членом. Если поля занимают область, длина которой мала по сравнению с колебанием фазы, то они действуют как тонкая линза, т. е. при прохождении области сильного поля импульс частиц резко меняется. Однако поскольку возвращающая сила, действующая на ансамбль частиц, изменяется синусоидально со временем и поскольку частицы пересекают линзу в моменты, зависящие от их фаз относительно осциллирующего поля, возвращающие силы в тонких линзах также меняются синусоидально и, следовательно, они нелинейны.

Применяются в основном два типа преобразователей продольного фазового пространства: *фазовые группирователи* и *группирователи по энергии* (фазовые разгруппирователи). Сохранение фазовой

площади при преобразованиях означает, что фазовые группирователи увеличивают разброс по энергии, а группирователи по энергии увеличивают разброс по фазе. Обычно, однако, аксептанс ускоряющей системы ограничивается формой эмиттанса, а не его размерами.

Упрощенный анализ предгруппирователей для электронного линейного ускорителя был предложен Нейлом [19] и Смарзом [22]. Лихтенберг [14] обобщил этот анализ, включив разброс по импульсам. Группирователи по энергии предложили независимо Джонсон [10], Лихтенберг и Робинсон [17]; Лихтенберг [16] провел общее исследование группирователей по фазе и энергии.

Мы будем изучать два типа предгруппирователей отдельно, несмотря на то что группирователи по фазе и по энергии используют одинаковые линейные преобразования. Это обусловлено тем, что возникающие на практике задачи достаточно специфичны.

Фазовые группирователи обычно применяют на входе линейного ускорителя. Эмиттансное фазовое пространство имеет разброс по импульсам, меньший аксептанса ускорителя, однако разброс по фазе равномерен. Эффективная площадь фазового пространства, занятая частицами, определяется нелинейностью фазового группирователя, а не площадью эмиттанса.

Группирователи по энергии обычно используют на выходе линейного ускорителя. Разброс по энергиям большой, но разброс по фазам порядка нескольких градусов. Эффективная площадь фазового пространства определяется в основном площадью эмиттанса.

В § 3.2 уже разработана общая теория преобразований для линейных систем. Рассмотрим два практических примера согласования продольного фазового пространства.

Фазовая группировка. Рассмотрим задачу согласования по фазе ионного источника с линейным ускорителем. Если считать, что параметры линейного ускорителя, управляющие движением частиц, изменяются медленно со временем, то для движения частиц около равновесной фазы можно написать гамильтониан [21]

$$H = (p^2/2m_1) - U, \quad (3.76)$$

где

$$U = \frac{e\mathcal{E}v_0}{\omega} (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi_s),$$

здесь U — потенциал, в котором движутся частицы; φ_s — равновесная фаза. Формула (3.76) будет получена в § 4.2. Гамильтониан H определяется начальными значениями фазы φ и импульса p . Потенциал и фазовая диаграмма — такие же, как на рис. 3.1. На рис. 3.14 они повторены вместе с синусоидальным электрическим полем. Поле \mathcal{E} , скорость равновесной частицы v_0 и продольная масса m_1 считаются постоянными. Каноническая пространственная координата для колебательного движения имеет вид

$$q = \frac{v_0}{\omega} \bar{\varphi} = \frac{v_0}{\omega} (\varphi - \varphi_s).$$

Наши переменные можно заменить на более удобные с помощью преобразования $\Delta E = v_0 p$, справедливого для малых колебаний. Здесь ΔE — отклонение энергии от энергии равновесной частицы,

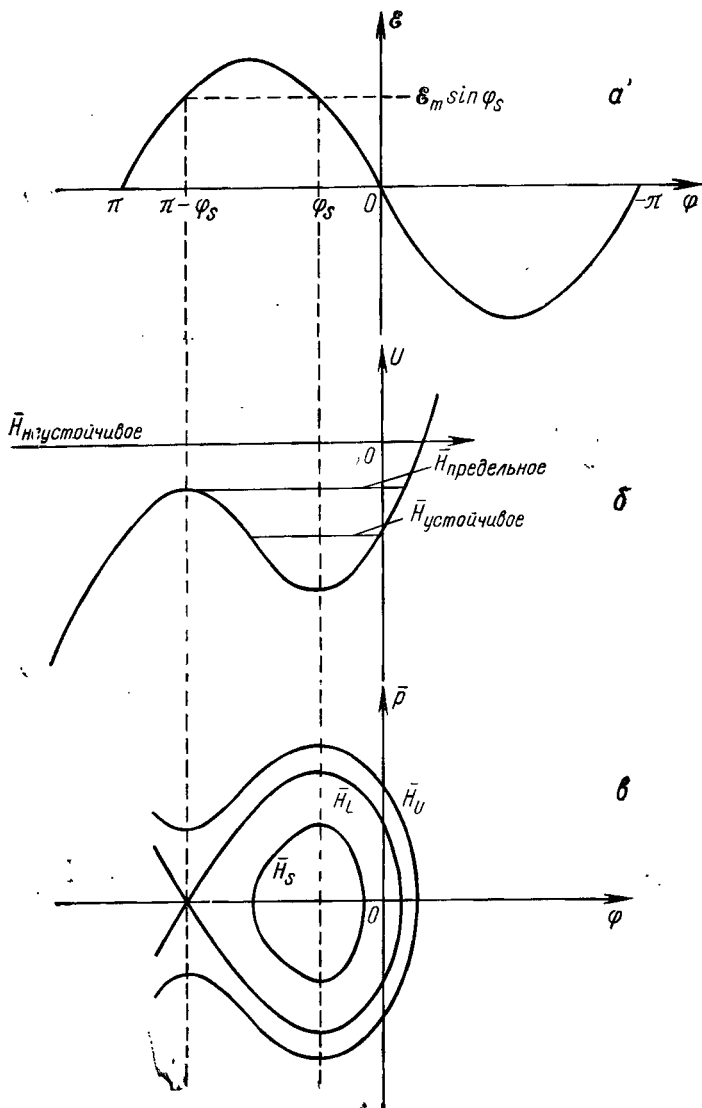


Рис. 3.14. Поле (а), потенциал (б) и фазовая диаграмма (в) для группирующей секции линейного ускорителя.

ω считаем строго постоянной. Если $\oint p dq = \text{const}$, то $\oint \Delta E d\bar{\varphi} = \text{const}$ и $(\Delta E, \bar{\varphi})$ также образуют каноническую пару. Если φ_s также считать постоянной, то можно заменить $\bar{\varphi}$ символом

φ . ΔE и φ — измеримые величины, они используются в последующем анализе как канонические переменные.

Проиллюстрируем операцию согласования на примере согласующей системы, состоящей из простого ВЧ резонатора, за которым следует пространство дрейфа. Будем считать, что синусоидальная модуляция напряжения мала, тогда система линза — дрейф имеет хорошо известную из теории клистрона группирующую характеристику [5]

$$\theta_2 - \theta_0 = \theta_1 - X \sin \theta_1, \quad (3.77)$$

где группирующий параметр X для релятивистского движения задан выражением

$$X = \theta_0 (E_0/E)^2 (V_1/2V_0),$$

а равновесная фаза θ_0 равна $\omega l/v_0$. Здесь ω — частота ВЧ напряжения резонатора; l — длина дрейфа; v_0 — постоянная составляющая скорости; V_0 — постоянная составляющая напряжения; V_1 — амплитуда ВЧ напряжения; E — полная энергия; E_0 — энергия покоя; θ_1 и θ_2 — соответственно фазы на входе и выходе группирующего резонатора. Если ВЧ резонатор и линейный ускоритель синхронизированы по фазе, то можно так подобрать фазу, чтобы разность фаз $\theta_2 - \theta_0 = 0$ соответствовала равновесной фазе φ_s в ускорителе. На рис. 3.15 мы построили, используя (3.77), группирующие кривые для двух значений X на «группирующей диаграмме», которая связывает $\theta_2 - \theta_0$ и θ_1 . На этом же рисунке внизу построено эмиттансное фазовое пространство и справа — акцептансное фазовое пространство. Акцептансное фазовое пространство соответствует линиям постоянного гамильтониана, построенного по формуле (3.76), на рис. 3.14. На обеих диаграммах кривые H_1 и соответствующие гамильтониану частицы на границе области устойчивости одинаковы. Другие же кривые постоянного гамильтониана не соответствуют друг другу. Предполагается, что приращения импульса в эмиттансном фазовом пространстве создаются группирующим ВЧ напряжением (эмиттансная фазовая площадь пренебрежимо мала). Для определенности берем $\varphi_s = \pi/4$ и, определяя параметр α формулой

$$\alpha = \frac{\Delta F_{\text{макс}} (\text{эмиттанс})}{\Delta E_{\text{мин}} (\text{акцептанс})},$$

получаем $\alpha = 2/3$. Отметим, что эмиттансное и акцептансное фазовые пространства связаны группирующей диаграммой, абсциссой которой является фаза эмиттанса, а ординатой — фаза акцептанса. Чтобы определить, какие частицы будут усвоены линейным ускорителем, а какие нет, можно поступить следующим образом: либо, исходя из группирующей диаграммы, построить эмиттанс на фазовой плоскости акцептанса (пунктирные линии B_1 и B_2 на плоскости акцептанса), либо построить кривые постоянного гамильтониана на группирующей диаграмме, исходя из акцептанса (пунктирные

линии на группирующей диаграмме). Первый способ, примененный Тейлором [25], дает обычное преобразование эмиттансного фазового пространства в акцептансную фазовую плоскость. Связь между энергией и фазой эмиттанса становится очевидной, что нельзя сказать о распределении плотности. Во втором методе можно непосредственно определить, какая часть эмиттанса ограничивается каждой кривой постоянного гамильтониана, однако информация об импульсе становится неопределенной. Уравнения для преобразования

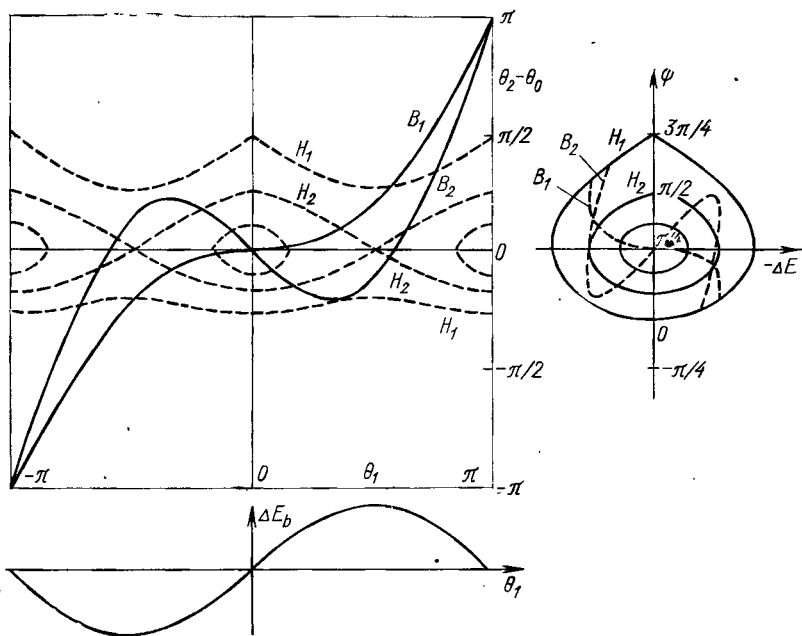


Рис. 3.15. Связь между эмиттансным и акцептансным фазовыми пространствами для частиц, группируемых с помощью однорезонаторного предгруппирователя.

кривых постоянного гамильтониана от акцептансной диаграммы к группирующей диаграмме были получены Лихтенбергом [15]. Здесь они не разбираются. После того как преобразование выполнено, для получения плотности частиц можно применить радиальную переменную ζ . Построив число частиц между любыми двумя линиями постоянного гамильтониана, получим график распределения плотности частиц $\rho(\zeta)$. Каждый радиус ζ соответствует максимальной протяженности по фазе φ , поэтому можно построить распределение плотности по фазе $\rho(\varphi)$. На рис. 3.16 построена функция $\rho(\zeta)$ для группирующей линии B_2 . Бесконечное значение плотности имеет место при таких значениях ζ , при которых соответствующий гамильтониан является касательным к группирующей кри-

вой. Очевидно, что группирующая кривая должна быть выбрана так, чтобы стационарные точки лежали внутри предельного гамильтониана.

Для электронного линейного ускорителя $\Delta E_{\text{макс}}$ (акцептанс) много больше ΔE_b , поэтому изменением энергии, которое вносит фазовый группируватель, можно пренебречь. В этом случае $\alpha = 0$ и границами акцептанса на группирующей диаграмме будут горизонтальные линии. Эмиттанс принимает максимальное значение, когда стационарные точки на группирующей кривой точно касаются границ акцептанса.

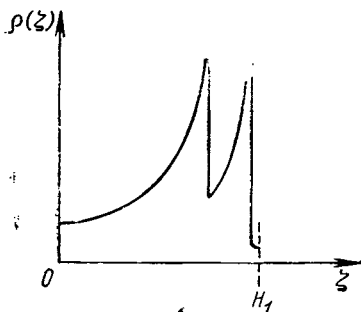


Рис. 3.16. Распределение относительной плотности усвоенных частиц, усредненное по фазам осцилляций.

Если $\Delta\varphi$ — акцептанс при нулевом разбросе энергии и группируватель синхронизирован по фазе, так что экстремумы группирующей кривой имеют место при значениях $\pm \Delta\varphi/2$, то может быть найдено значение группирующего параметра X , которое максимизирует акцептанс. Дифференцируя (3.77), получаем соотношение между X и θ_1 для стационарных точек

$$X = 1/\cos \theta_{1(c.t.)} \quad (3.78)$$

Подставив полученное выражение в (3.77) и потребовав, чтобы

$\theta_2 - \theta_1 = \Delta\varphi/2$ для стационарных точек, получим уравнение

$$\frac{1}{2} \Delta\varphi = \theta_{1(c.t.)} - \text{tg} \theta_{1(c.t.)}, \quad (3.79)$$

которое можно разрешить относительно значения фазы на входе для стационарных точек $\theta_{1(c.t.)}$. Далее из уравнения (3.78) можно определить группирующий параметр X . На рис. 3.17 представлен параметр X как функция $\Delta\varphi$ для предельного случая, когда $\alpha = 0$. Построим также приближенные значения X для $\alpha = 2/3$ и $\alpha = 1$, когда акцептансное фазовое пространство аппроксимируется эллипсом. На рис. 3.18 для тех же α показана зависимость относительной концентрации эмиттансных частиц от $\Delta\varphi$, полученная в предположении, что частицы распределены равномерно при всех входных фазах. На практике обычно выбирают X более постоянным, так что области высокой плотности (стационарные точки на группирующей кривой) лежат внутри границ акцептанса.

Метод нахождения концентрации частиц, которые группируются внутри любого угла выходной фазы, можно легко обобщить с тем, чтобы включить влияние более высоких гармоник пилообразного напряжения. Более высокие гармоники могут быть получены с помощью близко расположенных резонаторов или с помощью индуктивной настройки второго резонатора, который сильно возбуждается

пучком первого. В группирующем резонаторе можно добиться как группировки, так и ускорения частиц. Однако при этом неизбежно уменьшение степени группировки. Систему ускоритель — группирователь рассмотрел Колман [1].

Группировка по энергии. Группировка по энергии целесообразна тогда, когда частицы хорошо сгруппированы по фазе, но имеют большой разброс по энергиям. Линейная часть синусоидального напряжения очень хорошо аппроксимирует линейную линзу. При этом преобразования являются обратными к преобразованиям, использованным для группировки по энергиям. Для группировки по энергии используют линзы, которые уменьшают энергетический

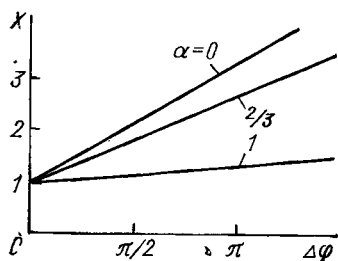


Рис. 3.17. Зависимость группирующего параметра X , максимизирующего число частиц с фазами в заданных пределах $\Delta\varphi$.

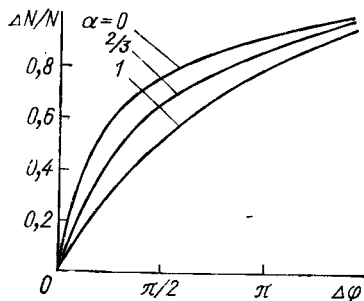


Рис. 3.18. Максимальная доля эмиттанса, которая может быть усвоена внутри заданного $\Delta\varphi$.

разброс с помощью тормозящего напряжения, так что фазовый эллипс сжимается к оси. Сначала установим соотношение между фазой и энергией в фазовом пространстве, дающее косоу эллипс. Матрица преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2 \\ \Delta E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\omega} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \Delta E_1 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Используем $(\Delta E, \varphi)$ -пространство. Параметр ω введен в уравнение линзы из соображений размерности; L — общий параметр, связывающий $\bar{\varphi}$ с ΔE . При релятивистских скоростях фазовое разделение с помощью дрейфовой области получить нельзя. Оно может быть получено системой из трех анализирующих магнитов, как предложили Лихтенберг и Робинсон [17]. Параметры такой системы вычислил Стеффен [24]. Разложив напряжение ВЧ резонатора около $\bar{\varphi} = 0$, получим

$$V_g = V_1 \bar{\varphi} \frac{V_1^3}{3!} \bar{\varphi}^3, \quad (3.81)$$

где линейный член $V_1\bar{\varphi}$ равен напряжению — $K\varphi/e\omega$, при котором косо́й эллипс сжимается к оси. Действие первого нелинейного члена сводится к искажению эллипса, такому, что центральная ось эллипса будет соответствовать энергии $eV_1\bar{\varphi}^3/3!$ относительно энергии равновесной частицы. Для малых искажений эмиттанс можно почти точно описать эллипсом, с чуть большей на величину этой добавки шириной по энергии. Если преобразованное фазовое пространство имеет полуось разброса по фазе $\bar{\varphi}_f$ и невозмущенную полуось разброса по энергии ΔE_f , то описывающий эллипс имеет полуось разброса по энергии, равную

$$\Delta E_{fT} = \Delta E_f + (eV_1\bar{\varphi}_f^3)/3! \quad (3.82)$$

Варьируя отношение осей эмиттансного эллипса, можно сделать отношение осей описанного эллипса равным отношению осей аксептанса. Эффективная площадь, занимаемая частицами, увеличивается на отношение $\frac{[\Delta E_f + (eV_1\bar{\varphi}_f^3)/3!]}{\Delta E_f}$, однако этот множитель обычно несуществен.

Мы приходим к выводу, что для большинства целей группировка по энергии может быть исследована линейной теорией, которая, однако, неприменима к фазовой группировке, так как для последней нелинейность группирователя определяет фазовую площадь, занимаемую частицами.

Однако при попытке сделать разброс по энергиям на выходе линейного ускорителя минимальным нелинейность снова начинает играть существенную роль. Из сохранения фазовой площади следует, что

$$\Delta E_f = (\Delta E_i \bar{\varphi}_i) / \bar{\varphi}_f.$$

Комбинируя это соотношение с (3.82) и минимизируя относительно $\bar{\varphi}_f$, получаем

$$\frac{eV_1\bar{\varphi}_f}{2!} - \frac{\Delta E_i \bar{\varphi}_i}{\bar{\varphi}_f} = 0.$$

Для $\Delta E_f \ll \Delta E_i$ можно использовать такое приближение, что линейной части тормозящего напряжения будет достаточно, чтобы сделать нулевым среднее значение начального разброса по энергиям ΔE_i , т.е. $eV_1\bar{\varphi}_f = \Delta E_i$. Найдем, что ΔE_{fT} минимально при

$$\bar{\varphi}_f = (2\bar{\varphi}_i)^{1/2}. \quad (3.83)$$

Это соответствует разбросу по энергиям

$$\Delta E_{fT} = \frac{2}{3} \Delta E_i (2\bar{\varphi}_i)^{2/2}. \quad (3.84)$$

§ 3.5. Распределение фазовой плотности внутри пучка

Введение. В предыдущих параграфах основное внимание сконцентрировано на анализе поведения ограниченной области фазового пространства с рассмотрением движения ее границ. Однако в § 3.4 мы встретились с нелинейным преобразованием, в котором выбор оптимальных параметров преобразования зависел от распределения плотности. Другая ситуация, когда распределение плотности играет важную роль, возникает при определении предельной плотности тока в пучке. Для безаберрационной системы линз плотность тока в пучке ограничена как начальным распределением по скоростям, так и собственным пространственным зарядом пучка. Параметры линз, однако, можно выбрать так, что основным ограничивающим фактором будет только распределение по скоростям. В этом случае Ленгмюр, [13], используя геометрическое доказательство, а также Пирс [20], используя теорему Лиувилля, получили выражения для предельной плотности тока пучка. Однако в методе Пирса при вычислении плотности тока в любой плоскости, отличной от плоскости изображения, возникают некоторые трудности, для преодоления которых Лихтенберг [17] ввел распределение плотности в метод эллипсов и получил результаты, аналогичные результатам Пирса.

Действие пространственного заряда теоретически можно включить в преобразованную форму теоремы Лиувилля для предельного случая, когда несущественны корреляции между частицами (уравнение Больцмана без столкновений), однако уравнения движения обычно решить нельзя. Трудность в том, что силы не являются больше независимыми от движения частиц. Можно ввести различные аппроксимации, чтобы включить действие пространственного заряда, например, усреднение по распределению плотности в фазовом пространстве. Важную роль в определении динамики пучка частиц может играть функция распределения в фазовом пространстве.

Предельная плотность тока. Учет тепловых скоростей. Для определения предельной плотности тока в пучке применим методику исследования движения ограниченной фазовой площади. Сначала на основании теоремы Лиувилля получим теоретическое значение предельной плотности. Пусть на траектории частиц плотность фазового пространства постоянна. Предположим, что мы измеряем плотность в точке с потенциалом V относительно катода; из теоремы Лиувилля получаем, что

$$k \exp [-(u^2 - \Phi)] = k \exp (-u_0^2), \quad (3.85)$$

где $k \exp (-u_0^2)$ — распределение плотности тока на катоде (будем считать его максвелловским); u и Φ — нормированные скорость и потенциал:

$$u^2 = mv^2/(2kT); \quad \Phi = eV/(kT). \quad (3.86)$$

Так как $u^2 - \Phi = u_0^2$, соотношение (3.85) удовлетворяется тождественно (в соответствии с теоремой Лиувилля). z-Компонента плотности тока \mathcal{Y} представляет собой функцию распределения, умноженную на z-компоненту скорости v_z и проинтегрированную по пространству скоростей:

$$\mathcal{Y} = v_T k \int u_z \exp [-(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \Phi)] du_x du_y du_z,$$

где $v_T = (2kT/m)^{1/2}$. Константа k вычисляется из граничного условия, что на катоде $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0$. Это даст

$$k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathcal{Y}_0}{v_T}.$$

Предел Лиувилля для тока внутри некоторого угла θ можно теперь вычислить интегрированием \mathcal{Y} по пространству скоростей, которое включает этот угол расходимости. Для одномерных линз интегрирование удобно производить в цилиндрических координатах. Обозначим

$$u_r = (u_x^2 + u_z^2)^{1/2}; \quad u_z = u_r \cos \alpha,$$

тогда элемент в нормированном пространстве скоростей равен $du_x du_y du_z = u_r d\alpha du_r du_y$, и получаем предельное значение для плотности тока

$$\mathcal{Y}_m = \frac{2\mathcal{Y}_0}{\pi} e^\Phi \int_{\Phi^{1/2}}^{\infty} du_r \int_{-\theta}^{\theta} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} du_y [u_r^2 e^{-u_r^2} e^{-u_y^2} \cos \alpha];$$

после интегрирования,

$$\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_0 \left[\frac{2}{\pi^{1/2}} \Phi^{1/2} + e^\Phi (1 - \operatorname{erf} \Phi^{1/2}) \right] \sin \theta, \quad (3.87)$$

где

$$\operatorname{erf} \Phi^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Phi^{1/2}} e^{-u^2} du.$$

Для $eV \gg kT$ вторым членом можно пренебречь, поэтому

$$\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_0 \frac{2}{\pi^{1/2}} \Phi^{1/2} \sin \theta. \quad (3.88)$$

Для аксиально-симметричной системы выражение для \mathcal{Y}_m можно определить аналогично. Используя сферические координаты (переменные интегрирования $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, $u_z = u \cos \alpha$, элемент объема $du_x du_y du_z = 2\pi u^2 \sin \alpha d\alpha du$), получим

$$\mathcal{Y}_m = 4\mathcal{Y}_0 e^\Phi \int_{\Phi^{1/2}}^{\infty} du \int_0^\theta d\alpha [u^3 e^{-u^2} \sin \alpha \cos \alpha];$$

после интегрирования

$$\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_0 (1 + \Phi) \sin^2 \theta \quad (3.89)$$

или для $\Phi \gg 1$

$$\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_0 \Phi \sin^2 \theta. \quad (3.90)$$

Выражения (3.88) и (3.90) получены на основании теоремы Лиувилля, следовательно, мы неявно предполагаем, что все частицы, содержащиеся внутри заданной фазовой площади, определяемой первоначальным током с катода, также будут содержаться внутри фазовой площади при потенциале Φ , при котором была измерена плотность тока.

Введем дополнительное ограничение на распределение, а именно: в расчет будем принимать только частицы, траектории которых лежат в угле расходимости θ . В этом случае основное предположение, на котором базируется теорема Лиувилля, нарушается и фактическая плотность становится ниже предела Лиувилля. В фазовом рассмотрении процесс уменьшения плотности тока становится непосредственно очевидным. Предельное значение угла расходимости соответствует предельному значению импульсной координаты фазового эллипса. Чем больше сжатие при фокусировке фазового эллипса по пространственной координате, тем больше разброс по импульсной координате и, следовательно, меньше доля частиц с траекториями внутри предельного угла расходимости. Для максвелловского распределения по скоростям практическое интегрирование может быть очень сложным. Так, Пирс для получения соотношения между действительным значением плотности тока и предельным значением Лиувилля брал действительное значение плотности тока в фокусе оптической системы. Продолав достаточно сложные вычисления, он получил следующие выражения для действительного значения плотности тока в плоскости изображения соответственно для одномерной и аксиально-симметричной линз:

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_0/M) \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\beta^2 \Phi}{1-\beta^2} \right)^{1/2} + \beta e^{\Phi} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\Phi}{1-\beta^2} \right)^{1/2} \right] \right\}; \quad (3.91a)$$

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_0/M^2) \{ 1 - (1 - \beta^2) \exp[-\beta^2 \Phi / (1 - \beta^2)] \}. \quad (3.91b)$$

Здесь $\beta = M \sin \theta$ для пучка с линейным увеличением M , для правильного эллипса $M = (R_1/R_2)^{1/2}$. Если весь ток катода достигает изображения, то плотность тока катода для одномерной и аксиально-симметричной линз равна соответственно:

$$\bar{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_0/M; \quad (3.92a)$$

$$\bar{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_0/M^2. \quad (3.92b)$$

Пусть действительное значение плотности тока равно \mathcal{Y} , тогда можно определить выход по интенсивности

$$\eta_i = \mathcal{Y}/\mathcal{Y}_m \quad (3.93)$$

и выход по току

$$\eta_c = \mathcal{J} / \bar{\mathcal{J}}, \quad (3.94)$$

поэтому, если значение \mathcal{J} известно, можно вычислить η_i и η_c . Оценив приближенно приведенные выше выражения Пирса, мы получим значение \mathcal{J} для одномерной и аксиально-симметричной линз. Тем самым мы построим зависимость η_i от η_c для каждой из этих линз. Однако прежде получим приближенные значения выражений Пирса, используя методы преобразования фазового эллипса, рассмотренные в этой главе. Будем полагать, что лучи параксиальны. Это означает, что: а) преобразования линейны и б) $eV \gg kT$. Это приближение позволяет преодолеть основное препятствие в трактовке Пирса (дело в том, что преобразование справедливо только для бесконечно малой области фазового пространства, а не для всей поверхности катода), кроме того, оно позволяет определить плотность тока в плоскости, отличной от плоскости изображения. Далее, используя теорию, рассмотренную в § 3.3 для преобразований эллипсов, можно определить параметры линзы, обеспечивающей заданное сжатие.

Найдем приближенное значение тока внутри половины некоторого угла θ в плоскости, в которой имеет место действие линзы (скажем, в плоскости x, z), взяв*

$$\sin \theta = u_{x \text{ макс}} / u_{\text{ мин}} \approx u_{x \text{ макс}} / \Phi^{1/2}. \quad (3.95)$$

Возьмем такую систему линз, чтобы она преобразовывала первоначально прямой эллипс на катоде в прямой эллипс в плоскости наблюдения, тогда, используя теорему Лиувилля, имеем для максимальной скорости внутри эллипса выражение

$$u_{x \text{ макс}} = (1/M) u_{x0 \text{ макс}}. \quad (3.96)$$

Из (3.95) и (3.96) получаем

$$1/M = \Phi^{1/2} \sin \theta / u_{x0 \text{ макс}}. \quad (3.97)$$

Действительная плотность тока \mathcal{J} обратно пропорциональна увеличению

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_e} = \begin{cases} 1/M & \text{одномерная линза,} \\ 1/M^2 & \text{аксиально-симметричная линза,} \end{cases} \quad (3.98)$$

где \mathcal{J}_e — плотность тока внутри акцептансного эллипса.

Теперь сравним значения выходов по току и интенсивности со значениями, полученными Пирсом. Соответственно для одномерной и аксиально-симметричной линз отношение средней плотности тока

* Заметим, что частицы, которые лежат выше $u_{\text{ макс}}$, но внутри $\sin \theta$, исключаются, так как их действительная скорость больше $u_{\text{ мин}}$. Однако для $\Phi \gg u_{x \text{ макс}}$ (параксиальное приближение) число таких частиц мало.

внутри эллипса к полной средней плотности тока на катоде приближенно выражается как:

$$\frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{J}_0} = \frac{\int_0^{u_{x0 \text{ макс}}} e^{-u_{x0}^2} du_{x0}}{-u_{x0 \text{ макс}}}; \quad (3.99)$$

$$\frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{J}_0} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{u_{t0 \text{ макс}}} u_{t0} e^{-u_{t0}^2} du_{t0}}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} u_{t0} e^{-u_{t0}^2} du_{t0}}. \quad (3.100)$$

Выход по току можно вычислить через отношение плотности тока в эллипсе к плотности тока, полученной при интегрировании по всем поперечным скоростям. Подставляя (3.92) и (3.98) в (3.94), получаем выход по току

$$\eta_c = \mathcal{J}_e / \mathcal{J}_0, \quad (3.101)$$

величину которого можно вычислить из (3.99) или (3.100) для любого значения $u_{x0 \text{ макс}}$. Соответствующий выход по интенсивности найдем, подставляя в (3.93) значение \mathcal{J}_m либо из (3.88), либо из (3.90), а значение \mathcal{J} из (3.98) и используя (3.97) для исключения $1/M$. Для одномерной и аксиально-симметричной линз имеем соответственно

$$\eta_i = \frac{\pi^{1/2}}{2} u_{x0 \text{ макс}} \frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{J}_0}; \quad (3.102)$$

$$\eta_i = u_{x0 \text{ макс}}^2 \frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{J}_0}. \quad (3.103)$$

Следовательно, задавая $u_{x0 \text{ макс}}$, можно найти как η_c , так и η_i и тем самым можно построить диаграмму ($\eta_i - \eta_c$) (рис. 3.19 и 3.20) и сравнить эти результаты с данными Пирса.

Влияние пространственного заряда. Теперь возвратимся к задаче из § 3.3 о частицах, вращающихся в однородном магнитном поле, создаваемом аксиально-симметричными линзами. Мы нашли, что в системе координат, вращающейся с ларморовой частотой $\omega_l = eB/2m$, движение частицы описывается уравнением

$$d^2 \rho / dt^2 + \omega_l^2 \rho = 0. \quad (3.104)$$

Введем теперь, как и выше, максвелловское распределение. Обозначим через ρ_q — координаты холодных электронов, траектории которых начинаются на границе катода, а через $\rho_p(\text{макс}) = v_T / \omega$ [где $v_T = (2kT/m)^{1/2}$ — средняя тепловая скорость] — координаты тепловых электронов, выходящих из центра катода. Тогда для каж-

дой траектории колебания задаются уравнением (3.104) с начальными условиями

$$\rho_q(0) = \rho_{\text{макс}}; \dot{\rho}_q(0) = -i\omega_l \rho_{\text{макс}}$$

и

$$\rho_p(0) = 0; \dot{\rho}_p(0) = v_T.$$

Начальное значение для $\dot{\rho}_q$ обусловлено тем, что мы выбрали вращающуюся систему координат, в которой уравнение движения имеет особенно простой вид (3.104). Движение около центра симметрии можно представить как суперпозицию двух простых гармонических колебаний по каждой координате, а соотношение фаз

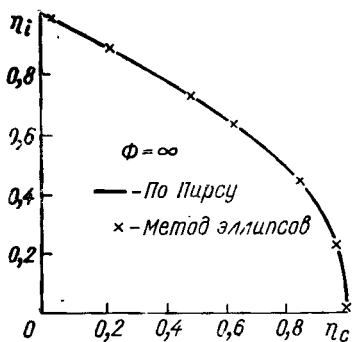


Рис. 3.19. Зависимость между выходом по току η_c и выходом по интенсивности η_i для однородной линзы.

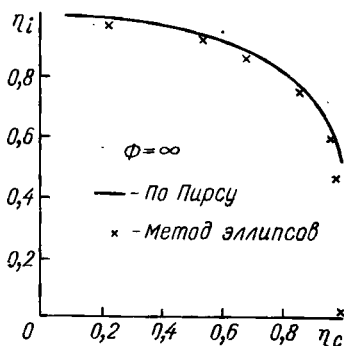


Рис. 3.20. Зависимость между выходом по току η_c и выходом по интенсивности η_i для линзы с круговой симметрией.

между этими двумя колебаниями определяется с помощью начальных условий. Однако особый интерес представляет один простой случай, когда обобщенный угловой момент (3.101) равен нулю для обоих независимых решений. Это справедливо для тепловых частиц, выходящих из центра симметрии. Предположим, что катод экранирован от магнитного поля, и пусть теперь он внезапно вводится в поле. Тогда из условия сохранения обобщенного углового момента следует, что частицы приобретут угловое вращение с ларморовой частотой ω . Так как $\rho_q = 0$ (непосредственно внутри области поля), решениями уравнения (3.104) для ρ_q и ρ_p будут соответственно синус и косинус и конфигурация пучка будет пульсировать между изображениями катода и кроссовером, где поперечное максвелловское распределение скоростей изображается как распределение плотности. Каждое пульсирование соответствует четверти оборота области фазового пространства. Здесь, как и в предыдущих разделах, мы предполагали, что постоянная продольная скорость v_0 (обусловленная начальным ускорением) достаточно большая и

что тепловые скорости частиц пучка незначительны. Действие продольных скоростей проявляется обычно в размытии конфигурации пучка. Конфигурацию изображений и кроссоверов экспериментально получил Ашкин (см. [9]). Результаты Ашкина, показывающие профиль пучка на протяжении четверти периода, даны на рис. 3.21. Эмиссию катода преднамеренно делали переменной по поверхности катода, с тем чтобы изображение катода показывало его структуру. Видно, что структура в кроссоверах размывается. Метод анализа аксиально-симметричных пучков впервые использовал Герман [9].

Под влиянием расталкивающих кулоновских сил, обусловленных собственным пространственным зарядом, движение частиц

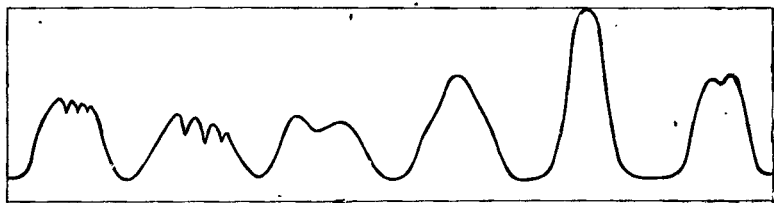


Рис. 3.21. Вариация плотности заряда вдоль пучка, иллюстрирующая переход от зубчатого изображения катода к сглаженному кроссоверу.

пучка будет изменяться. Предположим, что плотность пространственного заряда аксиально симметрична, тогда радиальное поле пространственного заряда \mathcal{E}_r определяется из теоремы Гаусса

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\sigma(r)}{\epsilon_0} r dr, \quad (3.105)$$

где σ — плотность пространственного заряда; ϵ_0 — диэлектрическая постоянная. Будем считать σ простой функцией радиуса. Например, если σ однородна по поперечному сечению, то

$$\mathcal{E}_r = \langle \sigma \rangle_r r / 2\epsilon_0,$$

где $\langle \sigma \rangle_r$ — усредненная по радиусу плотность. Подставим это значение \mathcal{E}_r в уравнение движения (3.86) и, принимая во внимание, что $r = |\rho|$ [из (3.58а) и (3.58б)], получаем

$$d^2 \rho / dt^2 + (\omega_p^2 - \omega_c^2(t)) \rho = 0, \quad (3.106)$$

где $\omega_c^2 = (e/m) (\langle \sigma \rangle_r / 2\epsilon_0)$, (3.107)

т. е. ω_c связана с плазменной частотой как $\omega_c^2 = \omega_p^2/2$. Если $\langle \sigma \rangle_r$ не зависит от t , то уравнение (3.106) можно решить для любого набора начальных условий, получая решения с уменьшенной частотой колебаний из-за того, что сила пространственного заряда частично компенсирует фокусирующую магнитную силу. Для частного вида инжекции при экранированном катоде (инжекция Бриллюэна) при

выборе $\omega_\sigma = \omega$ траектория ρ_q не будет осциллировать, однако она будет вращаться вокруг оси по окружности постоянного радиуса с ларморовой частотой. Это состояние, называемое *бриллюэновским потоком*, самосогласованно только в случае отсутствия тепловых скоростей.

Если принять во внимание тепловые скорости, то мы не вправе полагать, что σ не зависит от t . Рассмотрим метод определения приближенного самосогласованного движения огибающей пучка. Сначала, предполагая, что скорость v_0 постоянна вдоль движения, перепишем (3.106) в виде уравнения для траектории

$$(d^2\rho/ds^2) + (k_l^2 - k_\sigma^2)\rho = 0, \quad (3.108)$$

где $k_l = \omega_l/v_0$ и $k_\sigma = \omega_\sigma/v_0$. Теперь применим уравнение, относящееся к движению огибающей пучка, к уравнению движения частицы (3.71). Полагая $\rho = x$ и $\rho_l = x_l$ и подставляя выражения для ρ'' из уравнения (3.108), получаем

$$\rho_l'' \rho + (k_l^2 - k_\sigma^2)\rho_l \rho - \frac{\epsilon^2}{\rho_l^3} \rho = 0,$$

а после сокращения на ρ , как и раньше, будем иметь

$$\rho_l'' + (k_l^2 - k_\sigma^2)\rho_l - (\epsilon^2/\rho_l^3) = 0. \quad (3.109)$$

Можно определить $k_\sigma(s)$, вводя ток пучка I и учитывая, что плотность заряда есть отношение тока I к площади сечения пучка:

$$\langle \sigma \rangle_r = I/v_0 \pi \rho_l^2. \quad (3.110)$$

Это нам даст следующее дифференциальное уравнение для огибающей:

$$\rho_l'' + k_l^2 \rho_l - \frac{eI}{mv_0 2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho_l} - \frac{\epsilon^2}{\rho_l^3} = 0, \quad (3.111)$$

где, как и раньше, $\rho_l = (\rho_q^2 + \rho_p^2)^{1/2}$.

§ 3.6. Связь между степенями свободы

Типы связей. Применяя теорему Лиувилля к одной степени свободы, мы считали, что движение, соответствующее этой степени свободы, не зависит от движения, соответствующего другим степеням свободы. В большинстве предыдущих параграфов этой главы мы в действительности неявно предполагали независимость колебаний по каждой степени свободы, записывая уравнения движения для каждой координаты в отдельности. Можно различать три типа связей, которые существенны для движения пучков частиц: 1) связь движений по отдельным степеням свободы вследствие нелинейности в уравнениях движения; 2) мнимая связь, обусловленная неудачным выбором системы координат; 3) связь, обусловленная влиянием границ.

Первый тип связи частично рассмотрен в § 1.1 и 2.4. Более полный разбор включает явное представление нелинейных членов. Эта связь более полно рассмотрена на конкретных примерах в гл. 4 и 5.

Второй тип связи нуждается в пояснении. В § 3.2 рассмотрено линейное преобразование вида $x_2 = [M]x_1$. Теоретически возможно диагонализировать матрицу путем нахождения собственных векторов системы

$$(M)x = \lambda x,$$

однако часто бывает удобно сохранять x как функцию естественных координат и импульсов системы; например, система, разделяющая частицы по скоростям (такая система описана ниже), представляется преобразованием вида

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta s \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{24} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ \Delta s \\ \Delta v \end{pmatrix}. \quad (3.112)$$

В этом представлении продольное и поперечное фазовые пространства связаны через элементы m_{14} и m_{24} . Отклонение скорости влияет на поперечные координаты в первом порядке, однако других связей нет.

Третий тип связи обусловлен апертурными ограничениями, которые описываются нелинейными членами в уравнениях движения. Для прямоугольной границы эти ограничения можно выразить при помощи условий в форме

$$\|x\| \leq x_0; \quad \|y\| \leq y_0. \quad (3.113a)$$

Здесь рассматриваются колебания около центральной линии камеры с размерами $2x_0$ и $2y_0$. Прямоугольная камера не связывает колебания, соответствующие двум поперечным степеням свободы. Для эллиптической апертуры граничные условия будут

$$x^2/x_0^2 + y^2/y_0^2 = 1, \quad (3.113б)$$

а для апертуры гиперболической формы, применяемой в квадрупольных линзах,

$$\|xy\| = \text{const}. \quad (3.113в)$$

Последние нелинейности связывают уравнения посредством введения ограничения на размах колебания по одной степени свободы, который зависит от амплитуды колебания по другой степени свободы. В следующем разделе мы также рассмотрим влияние границ в сепараторе по скоростям.

Даже если уравнения движения связывают степени свободы, нельзя произвольным образом преобразовывать фазовые пространства, соответствующие этим степеням свободы. Так же как теорема

Лиувилля накладывает связи на полное фазовое пространство, точно так же имеется иерархия интегральных инвариантов (см. § 1.2), которая дает n связей для системы с n степенями свободы. Как мы видели в § 2.4, для специального случая многопериодной системы могут быть m ($m \leq n$) точных или адиабатических констант движения, которые изолируют движения по каждой из m степеней свободы. В общем, связи сужают класс преобразований фазового пространства. Для линейных систем условия более жесткие, которые дают $n(2n - 1)$ связей. Эти условия хорошо известны в теории групп (см. [3]) как симплектические условия. Таким образом, если решение как функция времени имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = (M(t|0)) \mathbf{x}(0),$$

то симплектическое условие означает, что матрица $[M]$ удовлетворяет уравнению

$$[\tilde{M}] [S] [M] = [S], \quad (3.114)$$

где $[\tilde{M}]$ — транспонированная по отношению к $[M]$ матрица и

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.114) легко доказать для одномерного осциллятора, используя результат (1.110), означающий, что определитель Вронского

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = \text{const.}$$

Последнее эквивалентно выражению

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 [S] \tilde{\mathbf{x}}_1 = \text{const}, \quad (3.115)$$

где $\mathbf{x} = (p, q)$, а индексы 1 и 2 соответствуют двум независимым решениям. Для матрицы преобразования имеем

$$\mathbf{x}_2(t) [S] \mathbf{x}_1(t) = \tilde{\mathbf{x}}_2(0) [\tilde{M}] [S] [M] \mathbf{x}_1(0)$$

и, применяя (3.115), видим, что уравнение (3.114) удовлетворяется. В двумерном случае имеется только одна связь, а симплектическое условие эквивалентно теореме Лиувилля.

Влияние $n(2n - 1)$ связей на ограничения преобразований фазового пространства полностью еще не исследовано. Например, хорошо известно, что симплектическое условие требует, чтобы собственные значения преобразования были взаимными или комплексно-сопряженными парами (для двух измерений), как мы уже видели в § 1.4. Этот результат использовали Курант и Снайдер [3] для исследования связи радиальных и вертикальных колебаний в синхротроне. Связи также ограничивают преобразование фазового

пространства от одной степени свободы к другой. Однако нужно заметить, что связь, обусловленная влиянием границ, не является гамильтоновой и поэтому не подчиняется ограничениям.

Фазовый анализ сепаратора частиц по скоростям. Рассмотрим, используя понятия фазового пространства, принцип работы устройства, применяемого в оптике пучков высоких энергий, — установку для сепарации частиц различных скоростей (но различных масс), обладающих одинаковыми импульсами. Простейший сепаратор представляет собой канал, в котором имеются скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное поля, так что для некоторой вполне определенной скорости электростатическая сила уравновешивает магнитную. Условимся, что электрическое поле направлено по оси x , а магнитное — по оси y , поскольку суммарная сила определяется как $e(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, частицы будут находиться в равновесии, если их скорость равна

$$v_0 = \mathcal{E}_x / B_y, \quad (3.116)$$

где скорость v_0 перпендикулярна к плоскости xy . Хотя точные уравнения движения для $v \neq v_0$ достаточно сложны, для $v = v_0 + \Delta v$ при $\Delta v / v_0 \ll 1$ можно получить простые выражения, где v — абсолютное значение \mathbf{v} (считая, что \mathbf{v} перпендикулярен \mathcal{E}_x и B_y). Приращение силы можно записать

$$\Delta F_x = eB\Delta v,$$

и соответствующее ускорение выражается в первом приближении как

$$mv_0 (dv_x/ds) = eB\Delta v.$$

Интегрируя один раз, получаем

$$v_x = \frac{eB}{m} \cdot \frac{\Delta v}{v_0} S + v_{x1}; \quad (3.117)$$

интегрируя второй раз, получаем выражение для смещения x

$$x = \frac{eB}{m} \cdot \frac{\Delta v}{v_0} \cdot \frac{s^2}{2} + v_{x1} s + x_1. \quad (3.118)$$

Предположим, что скорость v_x достаточно мала, так что v_0 и релятивистская масса m не меняются. Кинг [12] нашел решение точного уравнения движения и его результат в первом порядке по Δv совпадает с нашим. Следуя Кингу, будем называть частицы, которые не испытали отклонения, ω -частицами, а частицы, которые нужно отделить от ω -частиц и которые отклоняются при прохождении системы, назовем u -частицами. Таким образом, для ω -частиц будем иметь простое преобразование для дрейфового пространства

$$\begin{pmatrix} x_\omega \\ x'_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\omega 1} \\ x'_{\omega 1} \end{pmatrix}, \quad (3.119)$$

где l — длина сепаратора, а $x_w' = v_x/v_0$. На рис. 3.22, а, б, в показано акцептансное фазовое пространство соответственно на входе, в центре и на выходе сепаратора. Расстояния между пластинами сепаратора $2D$; пределы угловой расходимости x' на входе сепаратора определяются условием, чтобы частицы, имеющие на входе заданное положение, на выходе сепаратора касались отклоняющих пластин. Для u -частиц существует дополнительное смещение по x и x' , зависящее от Δv и определяемое выражениями (3.118) и (3.117). Можно также определить и приращение пути вдоль траектории Δs , так что $\Delta s = s\Delta v/v_0$; приращение Δs определяется эф-

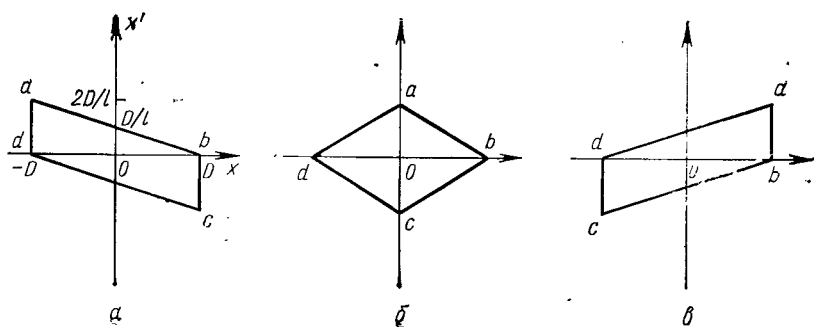


Рис. 3.22. Преобразование фазового пространства на входе (а), в центре (б) и на выходе (в) сепаратора по скоростям.

фектами второго порядка по любым другим координатам. Таким образом, можно написать в матричном виде преобразование начальных координат в конечные в двух фазовых плоскостях x, x' и $\Delta s, \Delta v$:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta s \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 & \frac{\omega_c l^2}{2v_0} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\omega_c l}{v_0} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{l}{v_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ \Delta s_1 \\ \Delta v_1 \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

В матричные элементы включена циклотронная частота $\omega_c = eB/m$. Уравнение (3.120) дает явное выражение матричных элементов матрицы связи, которая ранее приведена в общем виде (3.112). Однако обычно Δv — постоянная, а l — переменная величина и задача заключается в том, чтобы определить величину l , при которой достигается желаемое разделение w - и u -частиц. Определим в фазовом пространстве вектор

$$X_f = \begin{pmatrix} \alpha l^2 \\ 2\alpha l \end{pmatrix}, \quad (3.121)$$

характеризующий разделение ω - и u -частиц и явно зависящий от l ; здесь $\alpha = \omega_c \Delta v / 2v_0$. На рис. 3.23, а показано разделение фазовых пространств, относящихся к u -частицам (u -пространство) и ω -частицам (ω -пространство) на выходе сепаратора, если на входе эти пространства совпадали. Если мы хотим полностью отделить u -пространство от ω -пространства, выбираем параметры сепаратора так, чтобы вектор X_f сдвинул u -пространство относительно ω -пространства и чтобы они при этом не пересекались, как показано на рис. 3.23, б. Поскольку стенки занимают положение $\pm D$ (пунктирная линия), половина u -частиц теряется на стенках сепаратора;

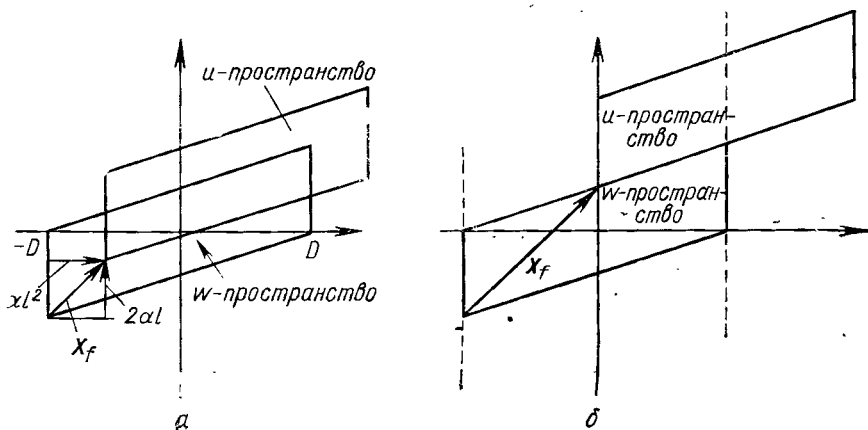


Рис. 3.23. Иллюстрация разделения фазового пространства частиц с различными скоростями.

другая половина затем должна быть отделена таким преобразованием фазового пространства, чтобы физически разделить ω - и u -частицы. Здесь мы не будем вдаваться в подробности этой процедуры. Важно отметить, что в трехмерном фазовом пространстве фазовая плоскость u -частиц находится на расстоянии Δv от x, x' -плоскости ω -частиц. Однако координата Δv и фазовая плоскость x, x' связаны, что приводит к смещению x, x' -координат на u -плоскости по отношению к ω -плоскости. Связанными оказываются только две степени свободы, поскольку наш выбор системы координат и смещение могут в принципе быть обратимыми. Однако из-за физического присутствия самого сепаратора половина u -частиц, соответствующая вектору сепарации на рис. 3.23, б, теряется на стенках сепаратора, что эквивалентно введению нелинейного элемента, который связывает эти две степени свободы. Для такого случая аксептанс канала сепаратора показан на рис. 3.24 в трех измерениях для всех значений Δv от 0 до Δv_1 , где Δv_1 соответствует Δv на рис. 3.23, б, т. е. в фазовом пространстве имеется полное разделение. Аксептанс усечен в направлении Δv . Если проектировать u -пространство на ω -про-

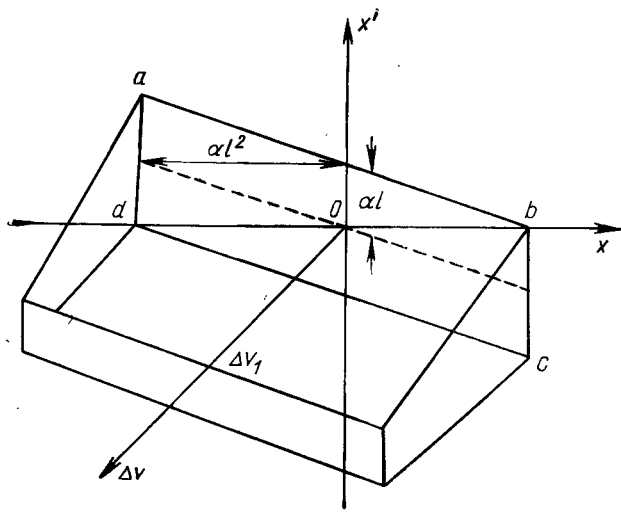


Рис. 3.24. Трехмерное представление разделения частиц по скоростям.

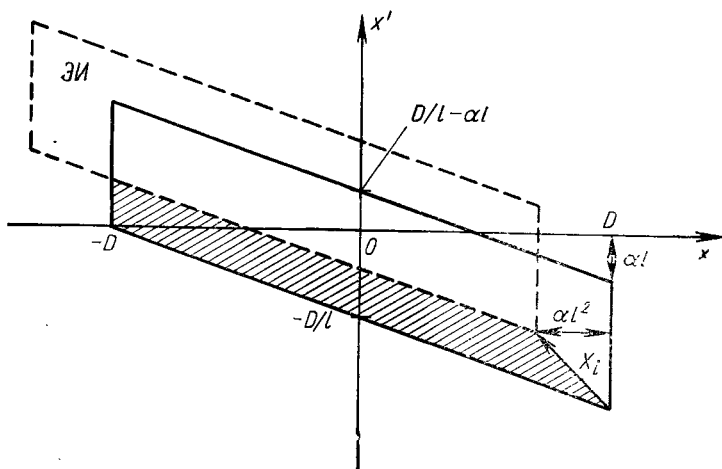


Рис. 3.25. К анализу разделения скоростей посредством эквивалентного источника.

странство, как показано на рис. 3.23, то все u -пространство, выходящее за пунктирную линию, попадает на стенки.

Хотя мы уже иллюстрировали связь двух степеней свободы, поучительно проделать это еще раз, чтобы показать большие возможности метода фазовой плоскости. Введем дополнительное условие, что все частицы должны быть усвоены сепаратором, а фактическая гибель u -частиц происходит в дополнительном устройстве. Это условие, которое превращает попадание u -частиц на стенки сепаратора, введено нами с намерением гарантировать, что u -частицы не будут отражаться в ω -пространство. Заметим также, что теперь

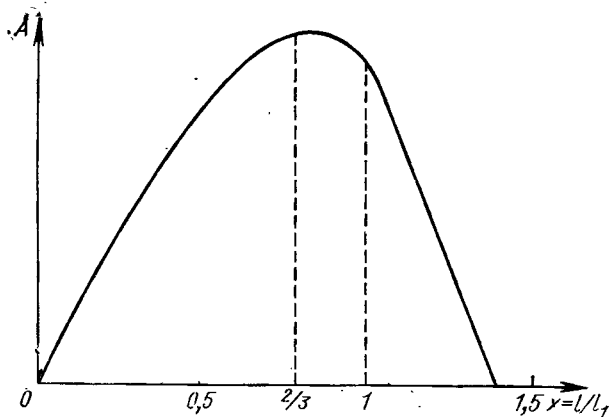


Рис. 3.26. Фазовая площадь, подходящая для инъекции: l — длина для полного разделения, $l = (D/\alpha)^{1/2}$.

аксептанс не будет ограничиваться линией $x' = al$ и подходящий аксептанс для ω -частиц зависит от вектора сепарации. Мы хотим теперь максимизировать аксептансное фазовое ω -пространство, которое также отделено от u -пространства. В аксептансном фазовом пространстве такое разделение будет понятным, если преобразовать вектор сепарации X_f к входному вектору X_i , так что перенос входного u -пространства на X_i приводит к эквивалентному источнику u -частиц, такому, что оно преобразуется в действительное u -пространство на выходе при свободном движении. Таким образом, матрица преобразования от X_i к X_f есть матрица дрейфа длиной l , а матрица обратного преобразования — матрица дрейфа в противоположном направлении той же длины, но обратного знака:

$$X_i = \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha l^2 \\ 2\alpha l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha l^2 \\ 2\alpha l \end{pmatrix}. \quad (3.122)$$

На рис. 3.25 показан измененный ω -аксептанс вместе с эквивалентным источником для u -аксептанса; заштрихованная площадь — общая площадь аксептанса и площадь разделения. Заметим, что

с увеличением разделения измененный аксептанс становится меньше, как уже говорилось выше, но имеет некоторое оптимальное значение. Заштрихованная площадь — это та площадь, в которой частицы могут быть инжектированы так, что w - и u -частицы разделены и нет частиц, попадающих на стенки дефлектора. Следовательно, полная фазовая площадь, подходящая для инжекции, может быть легко найдена из рисунка и равна

$$A = 4D\alpha l - 2\alpha^2 l^3. \quad (3.123)$$

Два члена в формуле (3.123) действуют противоположным образом. Из (3.123) видно, что разделение контуров увеличивается с увеличением l , но при этом происходит соответствующее уменьшение полного аксептанса. Зависимость A от нормированной длины l показана на рис. 3.26. Хотя наибольшая площадь получается при частичном разделении аксептанса и эквивалентного источника, площадь, подходящая для инжекции, не является простым параллелограммом и заполнить ее полностью трудно. Поэтому в реальной ситуации можно выбрать несколько меньшую площадь, которую и легче заполнить. Кинг [11] рассмотрел эти вопросы в приложении к реальным фокусирующим системам.

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ

§ 4.1. Бетатронные колебания

Общее описание колебаний в ускорителях. Концепции фазового пространства облегчают описание движения частиц в ускорителях и поэтому нашли широкое применение при конструировании последних. Изложим основные понятия движения частиц в ускорителях как исчерпывающий пример использования этих концепций. Особое внимание будет уделено методам согласования в фазовом пространстве с использованием результатов гл. 3. Этот аспект динамики частиц в фазовом пространстве играет первостепенную роль при инжекции частиц в ускоритель и используется для увеличения числа захваченных частиц. Методы фазового пространства находят применение при решении многих других вопросов динамики частиц в ускорителях, некоторые из них мы также рассмотрим. Одно из важных применений этого метода, которое подробно изучено в гл. 3, — вопрос транспортировки пучков. К тому же даже в тех случаях, когда трудно использовать гамильтонов формализм и соответствующие теоремы фазового пространства, концепции фазового пространства бывают очень плодотворны. Рассмотрение численных расчетов нелинейных явлений и точных траекторий с точки зрения фазового пространства позволяет взглянуть на предмет исследований под другим углом зрения. В § 4.4 дан пример использования представлений фазового пространства в связи с численными траекторными вычислениями. В литературе по ускорителям используются фазовые представления при расчетах нелинейных эффектов.

Чтобы ускорить заряженные частицы, необходимо их удерживать внутри вакуумной камеры. Хотя существует много способов ускорения частиц, обсудим только один: ускорение с помощью высокочастотного поля, в котором компонента электрического поля постоянна в системе координат, связанной с частицей. В линейных ускорителях ускорение происходит на небольших расстояниях с помощью сильного ускоряющего поля. В синхротронах ускорение происходит постепенно за много оборотов частицы по круговой орбите. Таким образом, в синхротроне частицы должны удерживаться около некоторой равновесной орбиты, тогда как в линейном ускорителе частицы хотя и должны фокусироваться, но устойчивость в течение длительного промежутка времени не требуется. Как в ли-

нейных, так и в циклических ускорителях устойчивость требуется по отношению к ускоряющему полю, которое неоднородно в пространстве. Устойчивое ускорение происходит только в том случае, когда структура поля такова, что частицы группируются около некоторого положения, причем напряженность поля в этом положении достаточна для ускорения частиц до той скорости, с которой распространяется электромагнитная ускоряющая волна.

Проведем качественный анализ колебаний в синхротроне, иллюстрируя большинство из требований устойчивости в ускорителях. В § 4.1 проанализируем те колебания, которые имеют место в отсутствие ускоряющих полей; эти колебания обычно называются *бетатронными колебаниями* (называются также свободными ко-

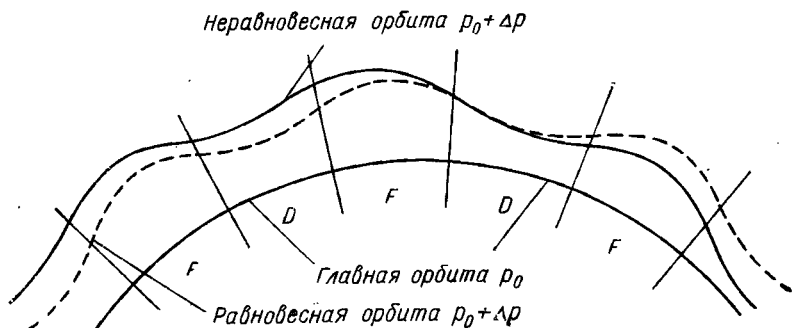


Рис. 4.1. Соотношения между типами орбит в синхротроне со знакопеременными градиентами (F — фокусировка, D — дефокусировка).

лебаниями), так как они впервые изучались Керстом и Сербером [11] в бетатроне. В § 4.2 развита теория колебаний, обусловленных наличием ускоряющего поля. Эти колебания обычно известны как *синхротронные колебания* (также называемые синхронными или вынужденными колебаниями), так как они впервые изучались в синхротроне.

Предположим, что в отсутствие ускоряющей силы существует замкнутая равновесная орбита, такая, что частицы с определенным начальным импульсом будут постоянно двигаться по этой орбите. Курант и Снайдер [6] показали, что такая орбита существует, если магнитный поток постоянен вдоль некоторого пути. Для азимутально-симметричных магнитных полей равновесные орбиты окружности, для периодически изменяющихся магнитных полей радиусы этих замкнутых орбит изменяются с тем же периодом, с каким меняется магнитное поле. Если начальные координаты частицы не соответствуют движению вдоль равновесной орбиты, то траектория частицы будет отличаться от равновесной орбиты и, если движение устойчиво, будет совершать колебания около равновесной орбиты. На рис. 4.1 для периодически изменяющегося магнитного поля показаны часть равновесной орбиты (пунктиром) и неравновесная коле-

бательная орбита. Чтобы предотвратить резонансную раскачку в ускорителе (как отмечалось в § 1.4), длина колебания не должна быть кратной окружности машины. Мы обычно линеаризуем уравнение движения, так что возмущение поперечной скорости не меняет абсолютную величину импульса. Таким образом, в пределах линейного приближения равновесная орбита соответствует заданной абсолютной величине полного импульса. Бетатронные колебания имеют место вследствие отклонений положения и скорости в направлении, перпендикулярном равновесной орбите.

Для анализа синхротронных колебаний рассмотрим синхронную орбиту, на которой частица с определенным импульсом ускоряется таким образом, чтобы поддерживать постоянной ее фазу относительно ускоряющего поля. Для ускорителей со знакопеременными градиентами орбита часто выбирается так, что магнитное поле вдоль нее постоянно, эта орбита называется главной и является окружностью (на рис. 4.1 она показана сплошной линией). Частица с импульсом и фазой, отличающимися от синхронных значений, совершает колебания около этой синхронной орбиты. Обычно период этих колебаний значительно больше, чем период бетатронных колебаний. Таким образом, на временной шкале синхротронных колебаний орбиты с устойчивой фазой — равновесные орбиты. Строго говоря, бетатронные и синхротронные колебания связаны. Однако, так как период синхротронных колебаний значительно больше периода бетатронных колебаний, в адиабатическом приближении эти два типа колебаний могут рассматриваться порознь. К тому же в линейной области, как мы показали, матрица преобразования для колебаний может быть диагонализирована, что ведет к независимым степеням свободы колебаний.

Основы теории орбит линейных и циклических ускорителей развиваются в следующих параграфах. Однако изложение не ставит перед собой задачу дать исчерпывающее описание различных типов ускорителей. Основной упор делается на применение методов фазового пространства к динамике частиц. Для более полного изучения теории ускорителей рекомендуем читателю ряд книг по данному предмету [15, 16]. Значительная часть материала этой главы освещается в несколько отличной форме в двух монографиях по ускорителям [12, 21]. Кроме того, имеется ряд обширных обзоров, на которые имеются ссылки в тексте, особенно заслуживают внимания статьи [28] по линейным ускорителям и работа по синхротронам [7]. Понятия фазового пространства в значительной степени используются при описании нелинейных бетатронных колебаний. Материал по этому вопросу, который мы здесь не рассматриваем, можно найти в указанных выше монографиях.

Свободные колебания в аксиально-симметричных циклических ускорителях. Рассмотрим аксиально-симметричные магнитные поля, как показано на рис. 4.2, *а* и *б*. Полюса магнитов на рис. 4.2, *а* соответствуют циклотрону, на рис. 4.2, *б* — синхротрону. Равновесная орбита расположена в краевом поле, которое, помимо того,

что удерживает частицы на круговой орбите, фокусирует их в вертикальном направлении. Выведем условие устойчивости орбиты относительно малых возмущений. В цилиндрической системе координат три компоненты векторного уравнения для силы, действующей на частицу, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(mr) &= mr\dot{\theta}^2 - er\dot{\theta}B_z; \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta} - erA_\theta) &= rF_{\theta \text{ ext}}; \\ \frac{d}{dt}(mz) &= er\dot{\theta}B_r, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где члены в круглых скобках — компоненты импульса.

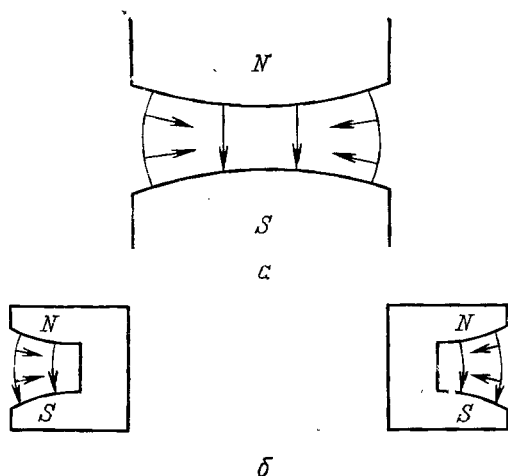


Рис. 4.2. Структура магнитов, поля и силы в циклотроне (а) и синхротроне (б).

Условия равновесия можно записать в виде следующего уравнения:

$$dp/dt = 0. \quad (4.2)$$

Из цилиндрической симметрии следует, что $B_r = 0$ при $z = 0$ и, таким образом, z -компонента уравнения (4.2) удовлетворяется на средней плоскости $z = 0$. Условие равновесия по оси r :

$$p_0 = er_0 B_z \quad (4.3)$$

и, полагая $E_{\theta \text{ ext}} = 0$, условие равновесия по θ :

$$mr_0^2 \dot{\theta} - er_0 A_\theta = \text{const.} \quad (4.4)$$

Если выберем $\text{const} = 0$ и вспомним, что $erA_\theta = e\Phi/2\pi$, где Φ — поток, пронизывающий орбиту, то, используя (4.3) и (4.4), получаем

$$\Phi = 2\pi r^2 B_z(r), \quad (4.5)$$

что является условием на поток, необходимый в бетатроне для плавного ускорения. Условия на устойчивые колебания по r и z можно найти разложением величин в ряды около равновесной орбиты. Преобразуя к θ как независимой переменной $d/dt = \omega(d/d\theta)$, первое из уравнений (4.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\theta} \left(m\omega \frac{dr}{d\theta} \right) - m\omega r = -erB_z, \quad (4.6)$$

где $m\omega = p_\theta/r$, и для малых колебаний (параксиальное приближение) $p_\theta = p$ и считаем постоянным. Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} x &= r - r_0; \\ p &= p_0 + \Delta p \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

и разложим B_z в ряд около $r = r_0$

$$B_z = B_0 + \Delta B + \frac{\partial B}{\partial x} x + \dots, \quad (4.8)$$

где $p_0 = eB_0 r_0$ для равновесной орбиты и ΔB — азимутальная вариация B . Подставляя эти разложения в (4.6), получаем с точностью до второго порядка по x , Δp и ΔB :

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial r} \right) x = r_0 \left(\frac{\Delta p}{p_0} - \frac{\Delta B}{B_0} \right), \quad (4.9)$$

где сокращены члены нулевого порядка. Общее решение (4.9) состоит из частного решения (считая члены с правой стороны постоянными)

$$x_p = \Delta r = r_0 \frac{(\Delta p/p_0) - (\Delta B/B_0)}{1 + (r_0/B_0)(\partial B/\partial r)} \quad (4.10)$$

и решения однородного уравнения

$$x = A \cos(\nu t + \delta), \quad (4.11)$$

где A и δ — произвольные постоянные и

$$\nu = \left(1 + \frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial r} \right)^{1/2}. \quad (4.12)$$

Видим, что устойчивые колебательные решения существуют только в том случае, если

$$-\frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} < 1. \quad (4.13)$$

Критерий устойчивости в вертикальной плоскости z выводится тем же образом, но с меньшими усилиями. Из третьего уравнения

(4.1) после преобразования его к θ как независимой переменной и введения параксиального приближения $\rho_\theta = \rho$ получаем

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{d\theta} \right) = \frac{erB_r}{p}. \quad (4.14)$$

Предполагая $r = r_0$, что верно в среднем, считая $p = p_0$ и подставляя $p_0 = mr_0\omega_c$ с $\omega_c = eB_0/m$ в (4.14), раскладывая B_r около $z = 0$, получаем с точностью до членов второго порядка по z

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = \frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B_r(0)}{\partial z} z.$$

Из уравнения $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ выражаем B_r через B_z и получаем

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} - \frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} z = 0, \quad (4.15)$$

которое имеет устойчивое решение при

$$-\frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} > 0. \quad (4.16)$$

Условие (4.16) вместе с условием устойчивости радиальных колебаний (4.13) дает

$$0 < -\frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} < 1, \quad (4.17)$$

т. е. условие устойчивости колебаний в направлениях r и z , перпендикулярных направлению движения вдоль p . Если ввести показатель поля

$$n = -\frac{r_0}{B_0} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad (4.18)$$

то уравнения для радиальных и вертикальных колебаний примут вид

$$(d^2x/d\theta^2) + (1-n)x = 0 \quad (4.19a)$$

и

$$(d^2z/d\theta^2) + nz = 0, \quad (4.19b)$$

решения их аналогичны полученным в (3.53) и, будучи выраженными через начальные координаты x_1 и начальные производные $x'_1 = dx_1/d\theta$, имеют вид

$$x = x_1 \cos v_x \theta + \frac{x'_1}{v_x} \sin v_x \theta \quad (4.20a)$$

и

$$z = z_1 \cos v_z \theta + \frac{z'_1}{v_z} \sin v_z \theta, \quad (4.20b)$$

где $v_x = (1-n)^{1/2}$ и $v_z = n^{1/2}$, $v_x < 1$ и $v_z < 1$ дают число колебаний за период, удовлетворяя совместному условию устойчивости.

Из выражений (4.20) видно, что бетатронные частоты должны быть велики, чтобы ослабить влияние угловой расходимости на величину амплитуд колебаний. Требования на эти две частоты, однако, взаимно противоречивы. Исследуем этот случай, изучая эллиптическое представление решений, данных в (4.20). Беря производную от (4.20а) и деля ее на v_x , получаем

$$\frac{x'}{v_x} = -x_1 \sin v_x \theta + \frac{x'_1}{v_x} \cos v_x \theta.$$

Возводя в квадрат и складывая с квадратом выражения (4.20а), после сокращения смешанных членов получаем обычный эллипс или представление в фазовом пространстве

$$x^2 + \frac{x'^2}{v_x^2} = x_1^2 + \frac{x_1'^2}{v_x^2} = \text{const.} \quad (4.21а)$$

В частности, аксептанс синхротрона в фазовом пространстве для радиальных бетатронных колебаний можно найти, если положить $x' = 0$ и $x = x_w$, где x_w — расстояние до стенок вакуумной камеры, в результате получаем

$$x_w^2 = x_1^2 + (x_1'^2 / v_x^2). \quad (4.21б)$$

Условие сохранения эмиттанса в фазовом пространстве требует, чтобы $x_1 \cdot x'_1 = \text{const}$, так как группа частиц с максимальной амплитудой x_w и со всеми фазами бетатронных колебаний будет находиться в фазовой плоскости внутри эллипса с полуосями x_1 и x'_1 . Из сказанного следует, что эмиттанс, который удается согласовать с аксептансом, наибольший в случае

$$x'_1 / v_x = x_1. \quad (4.22)$$

Это соотношение легко доказать, подставляя выражение, характеризующее сохранение эмиттанса, в (4.21) и находя стационарное значение x_w по отношению к x_1 . Чтобы удовлетворить соотношению (4.22), эмиттансу нужно придать определенную форму соответствующим преобразованием фазового пространства. Это согласование в фазовом пространстве, о чем речь пойдет в § 4.3, должно быть выполнено одновременно в двух перпендикулярных плоскостях.

Мы видели, что для аксиально-симметричных ускорителей требование устойчивости накладывает на v ограничение: v должно быть меньше единицы. Далее мы увидим, что для ускорителей с жесткой фокусировкой v_x и v_z можно сделать одновременно большими и, таким образом, диаметр пучка можно уменьшить, если эмиттансу придать форму, удовлетворяющую соотношению (4.22). В действительности площадь аксептанса растет с ростом v для заданного диаметра пучка.

Свободные колебания в синхротронах со знакопеременными градиентами. Мы видели, что колебания в аксиально-симметричном магнитном поле описываются уравнением

$$(d^2y/d\theta^2) + \nu^2 y = 0, \quad (4.23a)$$

где $\nu^2 = 1 - n$ или $\nu^2 = n$ для радиальных колебаний или вертикальных соответственно; $n = -(r/B)(\partial B/\partial r)$; θ — азимутальный угол. Теперь рассмотрим случай периодически изменяющегося n , тогда линеаризованное уравнение движения переходит в уравнение Хилла

$$(d^2y/d\theta^2) + K(\theta)y = 0, \quad (4.23б)$$

где $K(\theta + \theta_2) = K(\theta)$. Это уравнение исследовано достаточно подробно в § 1.4 и 3.3 при описании периодических систем общего

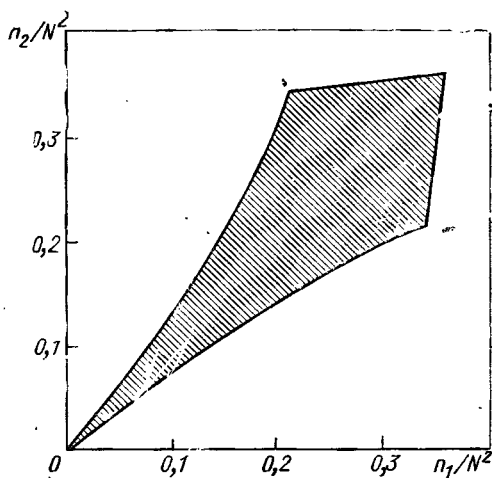


Рис. 4.3. Диаграмма устойчивости типа «галстук» для синхротрона со знакопеременными градиентами (Курант, Ливингстон, Снайдер, 1952 г.).

типа. Рассмотрим теперь случай, когда n резко изменяется между значениями n_1 и $-n_2$. Решение в каждой области дает матрицу преобразования за период; например, для вертикальных колебаний

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n_1^{1/2} \theta_1 & \frac{1}{n_1^{1/2}} \sin n_1^{1/2} \theta_1 \\ -n_1^{1/2} \sin n_1^{1/2} \theta_1 & \cos n_1^{1/2} \theta_1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \text{ch } n_2^{1/2} \theta_2 & \frac{1}{n_2^{1/2}} \text{sh } n_2^{1/2} \theta_2 \\ n_2^{1/2} \text{sh } n_2^{1/2} \theta_2 & \text{ch } n_2^{1/2} \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

что аналогично основному элементу фокусирующей системы [см. (3.77)], за исключением того, что теперь у нас FD-система, т. е. система, которая из-за переменного знака магнитного поля обладает фокусирующими и дефокусирующими областями, области же с нулевым магнитным полем отсутствуют. Преобразование за период дается выражением

$$y(\theta + \theta_L) = y(\theta) e^{\pm i\sigma}, \quad (4.25)$$

как в (3.80), с устойчивыми колебаниями, если след матрицы $\|a + d\| < 2$, где $a + d$ находится из (4.24) и имеет следующий вид:

$$a + d = 2 \cos n_1^{1/2} \theta_1 \operatorname{ch} n_2^{1/2} \theta_2 - \frac{n_1 - n_2}{(n_1 n_2)^{1/2}} \sin n_1^{1/2} \theta_1 \operatorname{sh} n_2^{1/2} \theta_2 \quad (4.26)$$

и аналогично для радиальных колебаний, только нужно n заменить на $1 - n$. Если $n_1 \gg 1$, $n_2 \gg 1$ и $\theta_1 = \theta_2 = \pi/N$ (где N — число изменений знака магнитного поля за один оборот), то область устойчивости представлена на рис. 4.3 диаграммой типа *галстук*, полученной Курантом, Ливингстоном и Снайдером [5]; область устойчивости заштрихована.

Мы уже видели в (3.75), что общее решение уравнения Хилла может быть записано в виде

$$y = \varepsilon^{1/2} \beta^{1/2} \cos(\nu\Phi + \delta) \quad (4.27)$$

с

$$\Phi = \int ds/\nu\beta, \quad (4.28)$$

где уже введено ν как число колебаний за полный оборот, а ε и δ — константы, зависящие от начальных условий. Как показано в § 3.3, ε — пропорциональна области фазового пространства, ограниченной колебательным движением. Определяя константу движения, можно найти, что произойдет на фазовой плоскости с эллипсом, образованным из всех начальных условий, в любой точке вдоль траектории; ясно, что такая константа может быть записана в следующем виде:

$$\cos^2(\nu\Phi + \delta) + \sin^2(\nu\Phi + \delta) = 1. \quad (4.29)$$

Из общего решения (4.27), возвращаясь к обозначениям § 3.3, получаем

$$\cos^2(\psi + \delta) = y^2/\varepsilon\beta. \quad (4.30)$$

Дифференцированием по s можно также найти из (4.27)

$$y'/\varepsilon^{1/2} = (\beta^{1/2})' \cos(\psi + \delta) - \beta^{1/2} \psi' \sin(\psi + \delta).$$

Решая относительно $\sin(\psi + \delta)$, подставляя вместо $\cos(\psi + \delta)$ выражение (4.27) и вместо ψ' — (3.84) (с $\varepsilon\beta = \omega^2$), а также выполняя дифференцирование $(\beta^{1/2})'$, получаем

$$\sin^2(\psi + \delta) = \frac{1}{\varepsilon\beta} \left(\beta y' - \frac{1}{2} \beta' y \right)^2. \quad (4.31)$$

Складывая (4.31) и (4.30), получаем точный инвариант

$$\frac{1}{\beta \varepsilon} \left[y^2 + \left(\beta y' - \frac{1}{2} \beta' y \right)^2 \right] = 1. \quad (4.32a)$$

Можно также исключить β' и записать инвариант (4.32) через параметр α . Из рис. 3.5, замечая, что $(\beta^{1/2})'/\beta^{1/2} = q'_{\max}/q_{\max}$, получаем

$$(\beta^{1/2})'/\beta^{1/2} = -\alpha/\beta$$

или, выполняя дифференцирование,

$$\beta' = -2\alpha. \quad (4.33)$$

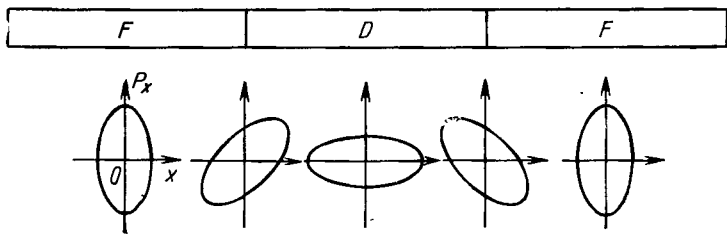


Рис. 4.4. Фазовые преобразования в синхротроне со знакопеременными градиентами.

После подстановки (4.33) в (4.32a) инвариант принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\beta \varepsilon} [y^2 + (\alpha y + \beta y')^2] = 1. \quad (4.32b)$$

Из (4.32b) можно определить условия, при которых y достигает максимального значения, для этого отметим, что $y = y_{\max}$ при $y' = 0$, что дает

$$(1/\beta) [y_{\max}^2 + (\alpha y_{\max})^2] = \varepsilon.$$

Используя соотношение $\alpha = -\frac{1}{2} \beta'$ из (4.33), имеем [так как из (4.27) следует, что $\beta' = 0$, где $y = y_{\max}$] $\alpha y_{\max} = 0$, так что

$$y_{\max}^2/\beta_{\max} = \varepsilon. \quad (4.34)$$

Это согласуется с тем фактом, что β — функция амплитуды. Таким образом, частица с данным значением β лежит на эллипсе, ориентация которого зависит от β . Площадь эллипса, равная $\pi \varepsilon$, — константа движения. При максимальных и минимальных значениях β $\alpha = 0$ и эллипс правильный. Серия таких эллипсов уже построена при рассмотрении квадрупольной системы FODO (см. рис. 3.12). Для системы с переменным показателем магнитного поля, которую сейчас рассматриваем, эквивалентная группа диаграмм на фазовой

плоскости представлена на рис. 4.4. Для определенности считаем $\beta_{\max}/\beta_{\min} = 4$. Для того, чтобы эмиттанс согласовывался с аксептансом ускорителя, эмиттанс в зависимости от положения инжекции должен быть преобразован к различным формам.

Для адиабатической константы получаем

$$J = \int pdq = \int mv_0 x' dx = p_0 \pi \epsilon,$$

тогда при медленном изменении массы $\epsilon \sim 1/p_0$ из (4.34) имеем выражение

$$y_{\max} \sim (1/p_0)^{1/2}, \quad (4.35)$$

которое дает адиабатическое затухание амплитуды свободных колебаний в циклическом ускорителе.

Бетатронные колебания при наличии вынуждающей силы. В § 1.4 уже рассмотрен случай гармонического осциллятора с вынуждающей силой. Мы нашли, что в случае равенства гармоника вынуждающей силы частоте свободных колебаний возникает резонансный рост амплитуды. Можно сделать такое же заключение относительно колебаний, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими коэффициентами, однако этот случай более сложный: Рассмотрим уравнение Хилла с правой частью вида

$$(d^2y/ds^2) + K(s)y = F(s). \quad (4.36)$$

Мы уже нашли нормированное решение однородного уравнения [из уравнения (3.75)]

$$y = \beta^{1/2} \cos \left(\int \frac{ds}{\beta} + \delta \right). \quad (4.37)$$

Следуя Куранту и Снайдеру [6], проведем замену переменной

$$\eta = \beta^{-1/2} y, \quad (4.38a)$$

что вместе с введенной ранее фазовой переменной

$$\Phi = \int ds/v\beta \quad (4.38b)$$

придает решению (4.37) вид гармонического осциллятора

$$\eta = \cos(v\Phi + \delta) \quad (4.39)$$

с независимой переменной Φ и зависимой переменной η . Подставляя (4.38) в (4.36) и используя дифференциальное уравнение для β , которое получено в § 3.3 [уравнение (3.48) с $\omega^2 = \beta$], получаем

$$(d^2\eta/d\Phi^2) + v^2\eta = \beta^{3/2} v^2 F(s). \quad (4.40)$$

Так как обычно β — быстро изменяющаяся функция Φ , подставляем среднее значение $\beta^{3/2} \langle \beta^{3/2} \rangle$ в (4.40), которое тогда имеет решение

(1.104) с η вместо y^* . Тогда соответствующее решение для y , $y = \beta^{1/2}\eta$, включая дополнительное колебание амплитуды с периодом $K(s)$. Если β постоянна, то из (4.38), учитывая однородную форму (4.40), видим, что Φ — азимутальный угол, а ν — число бетатронных колебаний за один оборот; в этом случае среднее значение β

$$\langle 1/\beta \rangle = \nu/r_0. \quad (4.41)$$

Если теперь пренебречь тем фактом, что Φ не изменяется гладко с изменением θ , а только усредняется до 2π за период, то η будет гладкой аппроксимацией для y . Ранее мы вывели уравнение (4.8) радиального движения в азимутально-симметричном синхротроне с возмущениями в магнитном поле и импульсе:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + \nu^2 y = r_0 \left(\frac{\Delta B}{B_0} - \frac{\Delta p}{p_0} \right), \quad (4.42)$$

где ΔB и Δp — в общем случае функция θ . Если синхротронные колебания намного медленнее бетатронных, то можно член в Δp в правой части считать постоянным, и при отсутствии возмущения магнитного поля получаем, как и в (4.9), частное решение

$$y_p = \frac{r_0}{\nu^2} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}, \quad (4.43)$$

которое является отклонением равновесной орбиты от главной. В гладком приближении для синхротрона со знакопеременными градиентами из (4.40) аналогично (4.42) имеем

$$\frac{d^2\eta}{d\Phi^2} + \nu^2 \eta = \langle \beta^{3/2} \rangle \frac{\nu^2}{r_0} \left(\frac{\Delta B}{B_0} - \frac{\Delta p}{p_0} \right), \quad (4.44)$$

где вместо $F(s)$ в (4.36) подставлено выражение $F(s) = (l/r_0)[\Delta B/B_0 - \Delta p/p_0]$. Как в (4.43), разброс по импульсам смещает равновесную орбиту на величину, определяемую частным решением. Чтобы привести (4.44) к виду, имеющему размерность y , умножаем его на $\langle \beta^{1/2} \rangle$, так что, полагая $y = \langle y \rangle = \langle \beta^{1/2} \rangle \eta$ и подставляя вместо β его значение из (4.41), получаем в гладком приближении

$$(d^2y/d\theta^2) + \nu^2 y = r_0 (\Delta p/p_0). \quad (4.45)$$

Частное решение уравнения (4.45) теперь идентично (4.43), за исключением того, что $\nu^2 \gg 1$ и достаточно большое число. Так что амплитуда колебаний, возникающих из-за отклонения импульса от импульса частицы, движущейся по равновесной орбите, значительно уменьшается.

Если член, описывающий возмущающую силу, периодичен с некоторым периодом $2\pi/\Omega$, нормированным по отношению к орбитальной частоте, то $F(\theta)$ может быть разложена в ряд Фурье, как в § 1.4,

* Теоретическим оправданием этой процедуры является метод усреднения, изложенный в § 1.4.

в результате чего дифференциальное уравнение в комплексной форме ($y = \text{Re}[Y]$) в гладком приближении имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 Y}{d\theta^2} + \nu^2 Y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\Omega\theta}, \quad (4.46)$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_0 \left(\frac{\Delta B}{B_0} - \frac{\Delta p}{p_0} \right) e^{-in\Omega\theta} d(\Omega\theta).$$

Хотя $\Delta p/p_0$ ранее мы считали константой, введем этот член здесь, чтобы облегчить качественное обсуждение связанных синхротронных колебаний, о чем речь пойдет ниже. Из (1.104) решение для Y имеет вид

$$Y = Ae^{i\nu\theta} + Be^{-i\nu\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n e^{in\Omega\theta}}{\nu^2 - n^2\Omega^2}, \quad (4.47)$$

где $y = \text{Re}[Y]$. Для $\nu^2 = n^2\Omega^2$ амплитуда колебаний в линейном приближении становится бесконечной. Для возмущений в магнитном поле, которые имеют место при частоте обращения $\Omega = 1$, резонанс наступает, когда ν — целое число. Для машин со знакопеременными градиентами, в которых ν — большое число, небольшие относительные изменения в ν приводят ее близко к некоторому целому числу, поэтому необходима большая точность при изготовлении магнитов. Мы увидим в § 4.6, что для того, чтобы развить удобную схему для многооборотной инжекции, нужно намеренно ввести искажения магнитного поля. Наконец, следует отметить, что для синхротронных колебаний Ω — маленькое число, и, если Ω — строго постоянна, резонанс может иметь место, но только для $n \gg 1$. Из-за связи между синхротронными и бетатронными колебаниями в линейном приближении нормальные колебания разделяются. Введение нелинейных эффектов снова вводит возможность резонансной связи, но не в форме (4.47). Однако для $n \gg 1$ эффект сходен с (4.47), где мы видели, что резонанс очень слабый. Именно это свойство делает действительной адиабатическую теорию. В попытке объяснить нарушение адиабатической инвариантности в зеркальных машинах Чириков пришел к тем же выводам. Мы обсудим эту ситуацию в § 5.4.

В дополнение к решению в виде ряда Фурье (4.47) для вынужденных колебаний также возможно получить замкнутую форму решения. Эта форма понадобится в § 4.6, поэтому рассмотрим сейчас член, описывающий вынуждающую силу $F(\theta)$, который будет позднее использован:

$$F(\theta) = \begin{cases} r_0 \frac{\Delta B}{B_0}, & \frac{\pi}{N} \leq \theta \leq \frac{\pi}{N}, \\ 0, & \text{всюду, кроме указанной выше области,} \end{cases} \quad (4.48)$$

т. е. предполагаем возмущение в одной секции магнита, а N — число секций со знакопеременными градиентами. Разложением в ряд Фурье можно получить решение, соответствующее (4.47),

$$y_p(\theta) = r_0 \frac{\Delta B}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v^2 - n^2} \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi} \cos n\theta, \quad (4.49)$$

где использовано решение в действительной форме. Замкнутая форма решения теперь получится, если воспользоваться теорией фильтров. Считаем $y_p(\theta)$ решением во временной области (θ -области), сконструированным из суммы преобразований в частотной области:

$$y_p(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) H(n) \cos n\theta. \quad (4.50)$$

Соответствующее решение во временной области (θ -области) является тогда интегралом от функций $g(\theta)$ и $h(\theta)$:

$$y_p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) h(\theta - \varphi) d\varphi, \quad (4.51)$$

где $g(\theta)$ и $h(\theta)$ — обратные преобразования $G(n)$ и $H(n)$. Полагаем

$$h(\theta) = \begin{cases} r_0 \frac{\Delta B}{B_0}, & -\frac{\pi}{N} \leq \theta \leq \frac{\pi}{N}, \\ 0, & \text{всюду, кроме указанной выше области,} \end{cases} \quad (4.52)$$

что мы рассматриваем как фильтр, через который передается свободное колебание. Фурье-преобразование $H(n)$ тогда запишется

$$H(n) = r_0 \frac{\Delta B}{B_0} \cdot \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi},$$

и, сравнивая (4.49) и (4.50), получаем

$$G(n) = 1/(v^2 - n^2).$$

Полученное решение должно иметь вид выражения свободных колебаний $A \cos v\theta$, но с периодичностью по азимуту. Поэтому коэффициенты $G(n)$ имеют вид

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A \cos v\theta \cos n\theta d\theta,$$

что после интегрирования дает

$$a_n = A \frac{2v \sin \pi v}{\pi (v^2 - n^2)}.$$

Сравнивая a_n с членами $G(n)$, получаем значение A , в результате чего для $g(\theta)$ имеем

$$g(\theta) = \frac{\pi}{2\nu \sin \pi\nu} \cos \nu\theta_0, \quad (4.53)$$

тогда полное периодическое решение имеет вид

$$y_p(\theta) = r_0 \frac{\Delta B}{B_0} \cdot \frac{1}{4\nu \sin \pi\nu} \int_0^{2\pi} \cos \nu\varphi h(\theta - \varphi) d\varphi, \quad (4.54)$$

где h дается выражением (4.52). Общий характер y_p — амплитуда, осциллирующая с частотой ν , но модулированная периодом $\theta = 2\pi$, так что орбита «уходит» от синусоиды вблизи возмущения

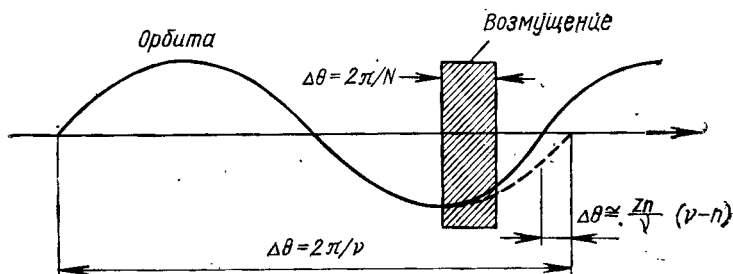


Рис. 4.5. Возмущение равновесной орбиты.

магнитного поля. Для $N \gg \nu h(\theta)$ ведет себя как импульсная функция, приводя к разрыву наклона орбиты. Для этого случая (4.54) принимает вид

$$y_p(\theta) = r_0 \frac{\Delta B}{B_0} \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{4\nu \sin \pi\nu} \int_0^{2\pi} \cos \nu\varphi \delta(\theta - \varphi) d\varphi,$$

где δ — функция Дирака. Теперь можно выполнить интегрирование, после чего получаем

$$y_p(\theta) = r_0 \frac{\Delta B}{B_0} \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{4\nu \sin \pi\nu} \cos \nu\theta, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (4.55)$$

Эта функция имеет период 2π . Развернутая картина орбиты в окрестности возмущения конечной ширины представлена на рис. 4.5.

§ 4.2. Синхротронные и связанные колебания; эффекты излучения и пространственного заряда

Введение. Обсудим кратко метод ускорения, при котором частица движется синхронно с высокочастотной волной, испытывая, таким образом, действие постоянного поля, в результате чего частица непрерывно ускоряется. Последовательность резонаторов дает тот

же эффект, так как поле может быть разложено в ряд Фурье, гармоники которого представляют волны, движущиеся в обоих направлениях. Только волна, движущаяся синхронно с частицей, оказывает на нее более ощутимое действие; поля, связанные с другими волнами, осциллируют в системе отсчета, связанной с частицей, почти около нулевого среднего значения.

Чтобы высокочастотная ускоряющая система работала, она должна обладать фазовой устойчивостью, т. е. возмущения относительно синхронной фазы должны быть самокорректирующимися. Устойчивость колебаний в линейном ускорителе детально исследовал Слайтер [25]. Фазовую устойчивость в синхротроне еще раньше доказали Мак Миллан [17] и Векслер [34], а позднее с использованием гамильтонового формализма изучали Твисс и Франк [33]. Курант, Ливингстон и Снайдер [5] обобщили анализ Твисса и Франка на синхротрон с сильной фокусировкой.

Изложим теорию синхротронных колебаний как в линейных ускорителях, так и в синхротроне. Цель этого изложения — познакомить читателя с основными методами разложения, которые, естественно, ведут к гамильтонову формализму.

Синхротронные колебания в линейных ускорителях. Рассмотрим ускоряющую структуру, через которую распространяется азимутально-симметричная волна: ускоряющая компонента поля волны зависит от радиуса как модифицированная функция Бесселя $I_0(\gamma r)$, в то время как радиальная компонента электрического поля ведет себя как $I_1(\gamma r)$. Здесь r — радиус-вектор от центра ускоряющей структуры (предполагаемой круговой) и γ — радиальное волновое число. Первые члены разложения этих функций:

$$I_0(\gamma r) = 1 + [(\gamma r)^2/4] + \dots;$$

$$I_1(\gamma r) = (\gamma r/2) + 0,06(\gamma r)^3 + \dots$$

Если предположить, что частица остается около оси ($\gamma r \ll 1$), то ускоряющие силы для всех радиусов приблизительно равны, а радиальные силы малы. Таким образом, аппроксимируем продольные уравнения движения, игнорируя радиальную зависимость полей, т. е. рассматривая движение вдоль оси. Тогда уравнение движения для частицы

$$dp/dt = e\mathcal{E} \sin \varphi, \quad (4.56)$$

где φ — мгновенная фаза волны в месте расположения частицы:

$$\varphi = \omega t - \omega \int_0^z \frac{dz}{v_0(z)}, \quad (4.57)$$

а \mathcal{E} — максимальное значение поля на оси; $v_0(z)$ — скорость волны; z — положение на оси вдоль ускоряющей структуры.

В момент времени $t = t_1$ частица находится в точке $z = 0$, что соответствует фазе ускоряющего поля $\varphi = \varphi_1$. Затем она ускоряется полем, и в зависимости от того, больше или меньше ее мгновенная

скорость скорости волны v_0 , она опережает по фазе бегущую волну или запаздывает. Второе уравнение движения получается дифференцированием (4.57)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \left(1 - \frac{v}{v_0} \right), \quad (4.58)$$

которое дает степень изменения фазы частицы по отношению к волне. Уравнения (4.56) и (4.58) дают полное описание движения, когда известны параметры ускорения \mathcal{E} и v_0 , начальная фаза и скорость частицы. Если либо v_0 , либо \mathcal{E} — функции времени (расстояние вдоль ускорителя), уравнения могут быть решены только численными методами. Однако если преобразовать уравнения к координатной системе, движущейся вместе с частицей, фаза которой по отношению к волне постоянна, то можно получить приближенно первые интегралы уравнений колебаний.

На рис. 3.14 было показано ускоряющее поле вместе с диаграммой в фазовом пространстве, описывающей колебательное движение. Если предположить, что частица с фазой φ_0 устойчива, тогда ее ускорение равно степени изменения скорости волны. Частицы, которые по фазе расположены впереди устойчивого положения, испытывают влияние со стороны меньшего поля и ускоряются менее быстро, чем частицы с устойчивой фазой, и, таким образом, перемещаются к положению устойчивой фазы. Аналогично частицы, которые отстают по фазе относительно устойчивого положения, испытывают влияние со стороны более сильного поля, догоняют устойчивые частицы и, таким образом, их фаза перемещается по направлению к устойчивой фазе. В координатной системе, движущейся с волной, эти частицы колеблются около фиксированного положения устойчивой фазы. Другое фиксированное положение — точка, соответствующая значению фазы, равному $\pi - \varphi_0$. Значение фазы $\pi - \varphi_0$ определяет одну из границ области фазовой устойчивости. Другую границу области фазовой устойчивости определим из гамильтоновой формулировки проблемы. Движение синхронной частицы или частицы с устойчивой фазой дается уравнением

$$dp_s/dt = e\mathcal{E} \sin \varphi_s,$$

где φ_0 считается постоянной в течение колебания. Фаза частицы может быть записана в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi},$$

где $\bar{\varphi}$ — отклонение фазы от положения равновесной фазы. Здесь и впоследствии символы с черточкой относятся к величинам, измеренным по отношению к движущейся системе, начало которой расположено в точке устойчивой фазы. В случаях, не допускающих двойного толкования, черточки могут быть опущены. Если разбить импульс на две части

$$p = p_0 + \bar{p},$$

то в обозначениях \bar{p} уравнение движения в движущейся системе есть

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{dp_0}{dt} = e\mathcal{E} (\sin \varphi - \sin \varphi_0). \quad (4.59)$$

Уравнение, описывающее изменение фазы, имеет следующий вид:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega \left(1 - \frac{v_0 + \bar{v}}{v_0} \right) = -\omega \frac{\bar{v}}{v_0}, \quad (4.60)$$

где производная от φ_0 по t равна нулю по определению. Выразим \bar{p} через \bar{v} , раскладывая p в ряд по \bar{v} , в первом порядке получаем

$$\bar{p} = (dp/dv)\bar{v}, \quad (4.61)$$

где dp/dv вычисляется в точке v_0 из релятивистского соотношения между p и v

$$p = m_0 c \beta / (1 - \beta^2)^{1/2};$$

здесь $\beta = v/c$. Выполняя дифференцирование, получаем соотношение

$$dp/dv = m_0 / (1 - \beta^2)^{3/2} = m_1, \quad (4.62)$$

которое известно как выражение продольной массы ускоряемой частицы. Подставляя (4.62) в (4.61), получаем соотношение между возмущением скорости и возмущением импульса вдоль направления движения:

$$\bar{p} = m_1 \bar{v}. \quad (4.63)$$

С помощью (4.63) исключим \bar{v} из (4.60) и получим

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = -\frac{\omega}{v_0} \cdot \frac{\bar{p}}{m_1}. \quad (4.64)$$

Уравнения (4.59) и (4.64) — дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие колебательное движение. Они могут быть представлены в канонической форме [удовлетворяя выражению (1.1)] введением переменной расстояния посредством соотношения

$$\bar{\varphi} = -\omega \bar{z} / v_0. \quad (4.65)$$

Подставляя (4.65) в (4.64) и исключая время, как в § 1.1, получаем гамильтониан колебательного движения

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2m_1} - e\mathcal{E} \left[\frac{v_s}{\omega} \cos \left(\varphi_s - \frac{\omega \bar{z}}{v_0} \right) - \bar{z} \sin \varphi_0 \right]. \quad (4.66)$$

Если считать \mathcal{E} , v_0 и m_1 не зависящими от времени величинами, то \bar{H} — не зависящий от времени гамильтониан и его значение определяется подстановкой начальных значений возмущения $\bar{p} = \bar{p}_i$ и $\bar{z} = \bar{z}_i$ в (4.66). Два члена в правой части (4.66) — члены кинетической и потенциальной энергии соответственно. Каждому набору

начальных условий соответствует в фазовом пространстве кривая постоянного гамильтониана. Связь между этими гамильтонианами и ускоряющим полем показана на рис. 3.14. Рис. 3.14, б отображает потенциальный член гамильтониана; на график потенциальной энергии нанесены линии постоянного гамильтониана (а также постоянной полной энергии). Если полная энергия меньше потенциальной в точке $\pi - \varphi_0$, то гамильтониан \bar{H}_s описывает устойчивое движение внутри потенциальной ямы. Кроме того, показаны предельный гамильтониан и гамильтониан, соответствующий неустойчивому движению. Изображенный устойчивый гамильтониан лежит в области почти квадратичного потенциала; поэтому кривая в фазовом пространстве близка к эллипсу и частицы, колеблющиеся в этом почти гармоническом потенциале, изохронны, т. е. имеют идентичные частоты. Сила, направленная к положению равновесия, ослабляется в направлении края области устойчивости и период колебания соответственно удлиняется. На предельной кривой направленная к равновесию сила в одной точке вдоль пути частицы равна нулю и период колебания бесконечен. Все частицы на данной кривой постоянного гамильтониана имеют один и тот же период, хотя изменение фазы не постоянно вдоль траектории. Когда начальная энергия больше той, при которой частица может быть захвачена, она не будет представлять замкнутую кривую в фазовом пространстве, как показано с помощью третьего гамильтониана.

Мы уже нашли одну границу области фазовой устойчивости в точке $\pi - \varphi_0$. Все частицы, начальная энергия которых такова, что они лежат на предельном гамильтониане, — частицы с предельной устойчивостью. Траектория в фазовом пространстве может быть найдена, если ввести в гамильтониан начальную фазу $\pi - \varphi_0$ и $\bar{p}_i = 0$. Если при этих начальных условиях положим в (4.66) $\bar{p} = 0$, то другая граница области фазовой устойчивости находится из выражения

$$\cos \varphi_1 + \varphi_1 \sin \varphi_0 = \cos (\pi - \varphi_0) + (\pi - \varphi_0) \sin \varphi_0.$$

Если допустить, что параметры медленно изменяются со временем, то для канонических переменных интеграл действия

$$\int p dz = \text{const},$$

что следует из адиабатической теоремы. Вычисляя интеграл действия в линейной области, можно найти хорошее приближение к поведению частицы. Раскладывая правую часть (4.59) и подставляя z из (4.65), получаем с точностью до второго порядка по z

$$d\bar{p}/dt = -e \mathcal{E} (\omega/v_0) \cos \varphi_0 \bar{z}.$$

Подставляя вместо \bar{p} выражение из (4.63) и замечая, что $\bar{v} = d\bar{z}/dt$, получаем уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = -\frac{e\mathcal{E}}{m_l} \cdot \frac{\omega}{v_0} \cos \varphi_0 \bar{z},$$

имеющего решение

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \bar{z}_m \cos \omega_s (t - t_1); \\ \bar{p} &= -m_l \omega_s \bar{z}_m \sin \omega_s (t - t_1),\end{aligned}\quad (4.67)$$

где

$$\omega_s = \left(\frac{e\mathcal{E}}{m_l} \cdot \frac{\omega}{v_0} \cos \Phi_0 \right)^{1/2}, \quad (4.68)$$

а v_0 и m_l в течение колебания считаются постоянными. Как в (1.15), вычисляем интеграл действия

$$\int \bar{p} d\bar{z} = \pi m_l \omega_s \bar{z}_m^2 = \text{const}, \quad (4.69)$$

который дает

$$\bar{z}_{\text{макс}} \sim 1/(m_l \omega_s)^{1/2}. \quad (4.70)$$

В обозначениях фазы, комбинируя (4.70) с (4.65), имеем

$$\bar{\Phi}_{\text{макс}} \sim (\omega/v_0) (1/(m_l \omega_s)^{1/2}). \quad (4.71)$$

Аналогичным образом получаем изменение импульса

$$\bar{p}_{\text{макс}} \sim (m_l \omega_s)^{1/2}. \quad (4.72)$$

Синхротронные колебания в синхротронах. В синхротроне частицы совершают бетатронные колебания около замкнутых орбит, удовлетворяющих в силу азимутальной симметрии ускорителей соотношению

$$p_\theta = r e B_z \quad (4.73)$$

в любой момент времени. Здесь r — радиус кривизны; p_θ — импульс вдоль орбиты, который, как считается, растет со временем. Если B_z также растет со временем в определенной пропорции, r будет оставаться постоянным. Для определенной же степени изменения B_z , чтобы поддерживать r постоянным, необходима вполне определенная фаза высокочастотной волны, и равновесное движение, связанное с синхронным ускорением, будет осуществляться на орбите, удовлетворяющей соотношению

$$p_0 = r_0 e B_0. \quad (4.74)$$

Отклонение синхронной частицы от этой равновесной орбиты, вызванное ускоряющими полями, ведет к устойчивым колебаниям. Эти колебания медленные в сравнении с бетатронными колебаниями и поэтому с позиции адиабатической теории могут рассматриваться отдельно.

Запишем скорость изменения канонического импульса

$$\frac{d}{dt} \left(r p_\theta - \frac{e}{2\pi} \Phi \right) = \frac{eV}{2\pi} \sin \Phi, \quad (4.75)$$

где член с правой стороны — момент, обусловленный высокочастотным ускоряющим полем с $V = 2\pi r \mathcal{E}; V \sin \varphi$ — полное напряжение, проинтегрированное по периметру ускорителя в момент, когда напряжение на отдельном резонаторе имеет фазу φ , считается, что оно добавляет к полной энергии частицы небольшую порцию энергии; Φ — полный поток, пронизывающий орбиту, входит в канонический момент. Предполагая, что отклонения от орбиты устойчивой фазы малы, $p = p_0 + \Delta p$ и $r = r_0 + \Delta r$, разложим поток, ограниченный орбитой, в ряд по Δr и оставим только члены первого порядка по Δr и Δp :

$$\frac{d}{dt} \left(r_0 \Delta p + p_0 \Delta r - \frac{e}{2\pi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Delta r \right) = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_0), \quad (4.76)$$

где, как и прежде, сокращены члены нулевого порядка по Δr и Δp . Вычисляя $\partial \Phi / \partial r$ из соотношения

$$\Phi = \int r B_z d\theta dr, \quad (4.77)$$

где B_z постоянно на главной орбите или на орбите с устойчивой фазой, второй и третий члены (4.76) сокращаются, что приводит к линеаризованному уравнению движения

$$\frac{d\Delta p}{dt} = \frac{eV}{2\pi r_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0), \quad (4.78)$$

которое по форме идентично уравнению движения в линейном ускорителе и едино как для ускорителей с переменными градиентами, так и для ускорителей с азимутальной симметрией. Нужно отметить, что (4.77) не действительно в случае, когда B_z изменяется вдоль орбиты с устойчивой фазой, что исключает из рассмотрения ускорители с постоянным магнитным полем и переменными градиентами.

В дополнение к (4.78) необходимо второе уравнение, чтобы связать степень изменения фазы с отклонением импульса. Раскладывая в ряд с точностью до членов второго порядка малости мгновенную угловую скорость частицы, получаем

$$\Delta \omega = \omega_0 \left(\frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta r}{r_0} \right). \quad (4.79)$$

Если приложенная частота ω_1 , которая, как мы предполагаем, является гармоникой синхронной орбитальной частоты $\omega_1 = h\omega_0$, то фаза частицы по отношению к высокочастотному полю есть

$$\varphi = \omega_1 (t + t_0) - h\omega t = \omega_1 t_0 - h(\Delta \omega) t, \quad (4.80)$$

где $\omega_1 t_0 = \varphi_0$ неколебательная фаза. Дифференцируя (4.80) по времени и подставляя вместо $\Delta \omega$ выражение (4.79), получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = -h\omega_0 \left(\frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta r}{r_0} \right); \quad (4.81)$$

$\Delta v/\Delta v_0$ и $\Delta r/r_0$ — выражаются через $\Delta p/p_0$, в результате чего получаем связь между скоростью изменения фазы и импульса. Первое из этих соотношений для линейного ускорителя

$$\Delta v/v_0 = (1 - \beta^2) (\Delta p/p_0). \quad (4.82)$$

Учитывая ограничение $\Delta r \ll r_0$, ищем вторую пропорциональность вида

$$\Delta r/r_0 = \alpha (\Delta p/p_0), \quad (4.83)$$

где α — параметр, характеризующий ускоритель. Для азимутально-симметричного ускорителя параметр α можно легко определить, раскладывая (4.73) около равновесных значений, в результате чего получаем

$$\Delta p = eB_0 (1 - n) \Delta r,$$

где, как и раньше, $n = -(r_0/B_0)(\partial B/\partial r)$; деля это выражение на (4.74), получаем

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{1}{1 - n} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}, \quad (4.84)$$

которое дает значение α ускорителя с постоянным градиентом магнитного поля. Для машин с переменными градиентами параметр α имеет более сложный вид, но в § 4.1 при рассмотрении вынужденных бетатронных колебаний показано, что [см. уравнение (4.43)]

$$\alpha \cong 1/v^2, \quad (4.85)$$

где v — частота бетатронных колебаний. Из (4.84) видно, что для азимутально-симметричного ускорителя (4.85) — точное выражение.

Подставляя (4.82) и (4.83) в (4.81), получаем требуемое уравнение скорости изменения фазы

$$d\phi/dt = h\omega_0 \eta (\Delta p/p_0), \quad (4.86a)$$

где

$$\eta = \alpha - (1 - \beta^2). \quad (4.86b)$$

Уравнения (4.78) и (4.86) — дифференциальные уравнения первого порядка относительно ϕ и Δp , которые по виду напоминают уравнения (4.59) и (4.62) для линейного ускорителя. Поэтому первый интеграл уравнений движения может быть получен аналогично случаю линейного ускорителя. Для $\eta < 0$ знак тот же, что и для случая линейного ускорителя, и устойчивая фаза расположена на переднем фронте волны. Для $\eta > 0$ устойчивая фаза расположена на заднем фронте волны. Физически последний случай соответствует ситуации, в которой увеличивающийся импульс увеличивает равновесный радиус в такой степени, что частица вопреки увеличению скорости затрачивает больше времени на прохождение ускорителя. Для очень больших энергий $1 - \beta^2 \rightarrow 0$, т. е. изменение импульса соответствует небольшим увеличениям в скорости, и поэтому η

должна быть положительной. Для магнита с постоянным градиентом для устойчивости должно выполняться соотношение $0 < n < 1$, поэтому $\alpha > 1$ и $\eta > 0$ при всех энергиях. В машинах с переменными градиентами α обычно меньше единицы, и существует критическая энергия, при которой точка фазовой устойчивости перемещается с переднего фронта волны на задний.

Как было в уравнениях (4.59) и (4.64) для линейного ускорителя, выражения (4.78) и (4.86) не записаны в гамильтоновой форме, в них Δp и φ — неканонические переменные. Вводя переменную расстояния вдоль орбиты \bar{s} при помощи соотношения $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi} = -\omega_1 \bar{s}/v_0$, и подставляя \bar{p} вместо Δp , получаем гамильтоновы уравнения:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{eV}{2\pi r_0} \left[\sin \left(\varphi_0 - \frac{\omega_1 \bar{s}}{v_0} \right) - \sin \varphi_0 \right]; \quad (4.87)$$

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = -\frac{\eta}{m_r} \bar{p}. \quad (4.88)$$

Как и в предыдущем пункте, получаем гамильтониан

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2(m_r/\eta)} + \frac{eV}{2\pi h} \left[\cos \left(\varphi_0 - \frac{\omega_1 \bar{s}}{v_0} \right) - \frac{h\omega_0 \bar{s}}{v_0} \sin \varphi_0 \right] \quad (4.89a)$$

или, вводя фазу φ ,

$$\frac{\bar{p}^2}{2(m_r/\eta)} + \frac{eV}{2\pi h} [\cos \varphi + (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi_0] = \text{const}. \quad (4.89b)$$

Для маленьких отклонений относительно равновесной фазы частота синхротронных колебаний не зависит от амплитуды. Чтобы определить эту частоту, как и в случае колебаний в линейном ускорителе, линеаризуем (4.87) и, подставляя вместо \bar{p} выражение его из (4.88), получаем уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 \bar{s}}{dt^2} + \omega_s^2 \bar{s} = 0,$$

где ω_s — частота синхротронных колебаний, задаваемая выражением

$$\omega_s = \left[\frac{\eta}{m_r} \cdot \frac{eV}{2\pi r_0} \cdot \frac{\omega_1 \cos \varphi_0}{v_0} \right]^{1/2}. \quad (4.90)$$

Можно сравнить величины частот синхротронных и бетатронных колебаний, замечая, что ω_s^2 дается приблизительно (для ультрарелятивистского случая $\alpha \gg 1 - \beta^2$) выражением

$$\omega_s^2 \cong \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h}{v^2} \cdot \frac{eV}{E} \omega_0^2,$$

где подставлено $1/v^2$ вместо η . Сравнивая с приближительным соотношением для бетатронных колебаний $\omega_b^2 = v^2 \omega_0^2$, получаем

$$\frac{\omega_v^2}{\omega_b^2} \cong \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h}{v^4} \cdot \frac{eV}{E},$$

здесь eV — прирост энергии за один оборот; E — полная энергия; h — соотношение между частотой высокочастотного поля и орбитальной частотой; ν — число бетатронных колебаний за период. Для машин с цилиндрической симметрией, работающих на первой гармонике, $h = 1$, $\nu \cong 1$ и, таким образом, $\omega_s/\omega_b \cong (eV/E)^{1/2}$, что является маленьким числом. Для больших ускорителей с сильной фокусировкой h может быть большим числом, но этот фактор будет, вообще говоря, в еще большей степени компенсироваться величиной ν^4 в знаменателе, обеспечивая, таким образом, адиабатическую связь между двумя частотами.

Можно также использовать линеаризованные уравнения, чтобы определить изменение амплитуды колебаний и импульса при медленном изменении параметров. Вычисляя интеграл действия, как и в (4.69), находим, что \bar{s} меняется как

$$\bar{s} \sim (\eta/m_r \omega_s)^{1/2}, \quad (4.91)$$

а \bar{p} пропорционально $1/\bar{s}$. Как и в случае линейного ускорителя, ω_s уменьшается с ростом энергии, колебания по \bar{s} затухают, а по \bar{p} нарастают.

В (4.89а) получен гамильтониан для колебательной части движения частицы, ускоряемой высокочастотной волной. В качестве канонических переменных для этого уравнения были выбраны отклонение импульса от импульса устойчивой фазы \bar{p} и отклонения положения \bar{s} . Однако переписывая гамильтониан (4.89б), используя высокочастотную фазу φ вместо переменной \bar{s} , приходим к более естественным переменным, с помощью которых можно описать систему. Простой, в общем случае неканонический вариант (4.89б) можно найти, используя переменную

$$\Delta E = v_0 \bar{p},$$

которая получается из разложения с точностью до членов второго порядка малости. Так как в первом порядке φ дается выражением

$$\varphi = \varphi_0 - (\omega_1 \bar{s}/v_0),$$

то при условии, что φ_0 и ω_1 не изменяются со временем, ΔE и φ — сопряженные переменные, описывающие небольшие колебания импульса около положения, соответствующего устойчивой фазе. Обычно ω_1 изменяется со временем, но если определить J как $J = \Delta E/\omega_1$, то снова можно вернуться к каноническим переменным. J имеет размерность действия, но J и φ , хотя и канонические, не являются переменными угол—действие, служащими для описания синхротронных колебаний, так как ω не является частотой, связанной с этими колебаниями. Записанное в этих переменных (4.89б) принимает вид

$$\bar{H} = \frac{J^2}{2(m_r/\eta)(v_0^2/\omega_0^2)} + \frac{eV}{2\pi h} f(\varphi), \quad (4.92)$$

где $f(\varphi)$ — член в скобках (4.89б). Используя (4.86а) и тот факт, что $d\varphi/dt = \omega$, можно показать, что

$$\omega \frac{d\omega}{dE} = \frac{2\pi}{(m_r/\eta)(v_0^2/\omega_0^2)}, \quad (4.93)$$

где использованы скорее инфинитезимальные, чем Δ -изменения. Подставляя это выражение в (4.92), получаем

$$\bar{H} = \frac{\omega}{4\pi} \cdot \frac{d\omega}{dE} J^2 + \frac{eV}{2\pi h} f(\varphi). \quad (4.94)$$

Эта форма гамильтониана использована в работах [21, 31], она очень удобна для описания синхротронов с постоянным магнитным полем и переменными градиентами, в которых более существенны изменения параметров с энергией, чем со временем. Здесь мы не изучаем подробно эти ускорители (см. [15], [21]).

Связанные колебания. Мы уже отмечали, что из-за большого различия частот свободных и вынужденных колебаний радиальное движение может быть адиабатически разбито на движение по двум степеням свободы. Даже если не использовать адиабатическое приближение, остаются три несвязанные степени свободы. Например, если рассматривать более простые случаи: а) круговой симметрии $\alpha = 1/(1-n)$; б) ультрарелятивистский $E_0/E = 0$, $r\dot{\theta} = r_0\omega_0 = c$; в) малых фазовых колебаний (линейное приближение) $\sin \varphi = \sin \varphi_0 = \cos \varphi_0 \bar{\varphi}$ со временем в качестве независимой переменной, то связанные уравнения легко вывести:

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dt^2} + \frac{eV h \omega_0 \cos \varphi_0}{2\pi (1-n) r_0 p_0} \bar{\varphi} = - \frac{h \omega_0}{r_0} \cdot \frac{dx}{dt}; \quad (4.95a)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (1-n) \omega_0^2 x = - \frac{eV \cos \varphi_0}{2\pi (1-n) p_0} \cdot \frac{d \bar{\varphi}}{dt}. \quad (4.95b)$$

Предполагая решение вида $\exp j\omega t$, получаем связанные уравнения:

$$-\omega^2 x + \omega_b^2 x + j\omega A \bar{\varphi} = 0; \quad (4.96a)$$

$$-\omega^2 \bar{\varphi} + \omega_s^2 \bar{\varphi} + j\omega B x = 0 \quad (4.96b)$$

с константами, определенными из (4.95) очевидным образом. Для того чтобы эта система имела нетривиальные решения, определитель, составленный из коэффициентов, должен равняться нулю, откуда получаем квадратичное по ω^2 уравнение

$$(\omega^2 - \omega_b^2)(\omega^2 - \omega_s^2) + \omega^2 AB = 0. \quad (4.97)$$

Для несвязанных колебаний ω_b и ω_s — угловые частоты свободных и вынужденных колебаний соответственно. При наличии связи все же существуют независимые собственные решения, соответствующие двум решениям (4.97). Полагая $\omega_b \gg \omega_s$, получаем приблизительно следующие собственные решения

$$\omega^2 = \omega_b^2 - AB \quad (4.98a)$$

и

$$\omega^2 = \frac{\omega_b^2}{\omega_b^2 - AB} \omega_s^2. \quad (4.98)$$

Адиабатическое изменение фазового пространства для каждой отдельной степени свободы может быть теперь вычислено с использованием (4.98) для соответствующих частот. Далее мы обсудим радиационное затухание, предполагая, что в силу линеаризации или адиабатического приближения три степени свободы разделяются. Хотя полученные выше соотношения были найдены для ультрарелятивистского случая, аналогичные выражения могут быть выведены при низких энергиях.

Затухание амплитуды колебаний, обусловленное радиационными потерями. В дополнение к адиабатическому затуханию бетатронных и синхротронных колебаний в синхротроне колебания затухают в силу радиационных потерь, как ожидалось из обсуждения негамильтоновых эффектов в § 1.2. Цель этого параграфа — проиллюстрировать приложение общей теории негамильтоновых сил к специфическому случаю — классическому излучению. Убедимся, что общая теория должна применяться с большой осторожностью. Результаты этого параграфа будут использованы при изучении проблемы многооборотной инжекции в синхротрон в § 4.6.

Полная интенсивность, излучаемая электроном, движущимся по круговой орбите, определяется выражением, данным Швингером [24],

$$P_\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^3} \cdot \frac{v^2}{c^2} B^2 \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2, \quad (4.99)$$

где E — полная энергия; B — магнитное поле. Тогда энергия уменьшается как

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{dE}{dt} = - \frac{P_\gamma}{E}.$$

Так что

$$E = E_0 \exp(-t/\tau), \quad (4.100)$$

где $\tau = E/P_\gamma$. Если для поддержания импульса прикладывается ускоряющее поле, то амплитуда вертикальных бетатронных колебаний будет затухать со временем, причем декремент затухания пропорционален τ , так как поперечный импульс уменьшается с этой скоростью, в то время как импульс вдоль пути частицы постоянен. Однако для радиальных бетатронных колебаний или синхротронных колебаний ситуация несколько иная. Для радиальных бетатронных колебаний или синхротронных колебаний в дополнение к затуханию, возникающему из-за повсеместных радиационных потерь, имеются члены, включающие изменение излученной энергии с изменением радиуса. Исследуем затухание, следуя анализу [23]. Полное изложение радиационного затухания может быть найдено в книге [12].

Общим методом, которым мы пользовались для описания колебаний частиц в циклическом ускорителе, является определение небольших отклонений от главной орбиты. Если все колебания линейны, то можно описать движение с помощью нормальных колебаний, а именно тремя нормальными колебаниями, описывающими три степени свободы. Эти нормальные колебания не будут прямо соответствовать бетатронным и синхротронным колебаниям, как описывалось раньше, из-за связи между радиальными бетатронными колебаниями и синхротронными колебаниями. Однако, предполагая, что скорость изменения параметров вынужденных колебаний мала в сравнении с частотой свободных колебаний, можно считать, что нормальные колебания адиабатически соответствуют описанным выше колебаниям. В силу этого предположения матрица преобразования шестого порядка, связывающая начальные значения параметров с конечными значениями, диагонализируется в три отдельные 2×2 матрицы с определителем, равным единице.

Если ввести излучение, то члены матрицы примут слегка отличающиеся значения и определитель будет незначительно отличаться от единицы. Если предположить, что с точностью до членов второго порядка малости каждая отдельная квадратичная матрица преобразования второго порядка отличается от единицы на небольшую величину δ_{ii} , то с этой точностью определитель квадратичной матрицы шестого порядка, который является произведением трех определителей, дается выражением

$$|M| = 1 + \sum_{i=1}^3 \delta_{ii}, \quad (4.101)$$

где определитель матрицы без учета радиационного затухания равен единице. Если принять, что переменные $x, x', z, z'; x' = dx/ds, \dots$ описывают бетатронные колебания, а $\Delta E, \varphi$ — синхротронные, то можно ожидать, что в первом порядке излучение изменит скорость, координаты же останутся прежними. Диагональный член в ΔE может быть определен из характеристики потерь на излучение $P_{\gamma} \sim E^2 B^2$ или выражен через потерю энергии за один оборот

$$E_1 \sim E^2 B^2 r \sim \left(1 + 2 \frac{\Delta E}{E_0} + 2 \frac{\Delta B}{B_0} + \frac{\Delta r}{r_0} \right) E_0^2 B_0^2 r_0.$$

Из матричных элементов для ΔE и φ видно, что при потерях на излучение за оборот $E_1 \Delta E$ изменяется за один оборот на величину δE_1 , где $\delta E_1/E_1 \simeq 2(\Delta E/E_0)$, и, таким образом, диагональный член в матричном элементе, связывающем отклонение энергии $\Delta E + \delta E_1$ после оборота с энергией ΔE до оборота, есть

$$1 - (2E_1/E_0), \quad (4.102)$$

где E_1 — положительная величина. Так как все компоненты импульса в одинаковой степени подвержены излучению, переменные для свободных колебаний, которые пропорциональны импульсу, не подвержены действию излучения.

Если теперь ввести высокочастотное ускорение, то появятся дополнительные члены, дающие вклад в затухание. Прирост энергии не зависит от ΔE и, таким образом, не дает вклада в матричный элемент, связывающий начальное и конечное значения ΔE . Однако увеличение энергии E_2 уменьшает угловую расходимость. Это

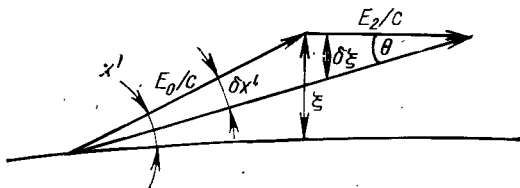


Рис. 4.6. Диаграмма, иллюстрирующая радиационное затухание в синхротроне.

можно увидеть на рис. 4.6. Тогда для $\delta x' \ll x'$ из рисунка мы имеем соотношение

$$\delta \xi = (E_2/c) \theta = (E_2/c) x', \quad \delta \xi / \xi = \delta x' / x' \quad \text{и} \quad \xi = x' E_0/c.$$

Исключая $\delta \xi, \xi$ и θ , получаем

$$\delta x' = (E_2/E_0) x',$$

так что диагональный член для x' становится равным $1 - (E_2/E_0)$ и аналогично для z' . Определитель преобразования после суммирования всех трех компонент есть

$$1 + \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = 1 - 2E_1/E_0 - 2E_2/E_0 \quad (4.103)$$

и произведение собственных значений дается, как и в § 1.4, выражением

$$\prod_{i=1}^3 \exp(-2\alpha_i) \exp(\pm j\beta_i) = 1 - 2E_1/E_0 - 2E_2/E_0,$$

где α_i — затухающие члены для трех комплексно сопряженных собственных значений. Как показано в § 1.4, мнимая часть равна единице, и из разложения экспонент в ряд для $\|\alpha_i\| \ll 1$ получаем общее выражение для суммы констант затухания:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = E_1/E_0 + E_2/E_0. \quad (4.104)$$

Рассмотрим частный случай, в котором высокочастотное ускорение компенсирует потерю энергии на излучение, т. е. $E_2 = E_1$, тогда затухание для трех мод

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 2E_1/E_0. \quad (4.105a)$$

Мы пришли к важному выводу, что сумма констант затухания не зависит от формы ведущего поля, а зависит только от потерь за один оборот. Если выразить α_i через величины, обратно пропорциональные временным константам, то имеем:

$$\sum_{i=1}^3 (1/\tau_i) = 2 (P_\nu/E_0). \quad (4.105б)$$

Теперь получим скорость затухания отдельных мод колебаний. Вертикальные колебания не зависят от радиального движения и поэтому определяются своим собственным матричным элементом

$$\alpha_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_2}{E_0} \quad (4.106а)$$

или, если записать через время, считая $E_2 = E_1$,

$$1/\tau_z = \frac{1}{2} P_\nu/E_0. \quad (4.106б)$$

Затухание для синхротронных колебаний получается из дифференциального уравнения для ΔE , включающего затухающий член. Из (4.101) имеем:

$$\frac{d\Delta E}{dN} = -E_1 \left(2 \frac{\Delta E}{E_0} + 2 \frac{\Delta B}{B_0} + \frac{\Delta r}{r_0} \right). \quad (4.107)$$

Исключим Δr , используя коэффициент расширения орбиты

$$\Delta r/r_0 = \alpha (\Delta E/E_0), \quad (4.108)$$

а ΔB исключим, учитывая тот факт, что равновесная орбита должна быть замкнутой, тогда с точностью до членов второго порядка малости

$$\Delta B/B_0 = (1 - \alpha) (\Delta E/E_0). \quad (4.109)$$

Подставляя (4.108) и (4.109) в (4.107), получаем для потери энергии, обусловленной излучением,

$$d\Delta E/dN = -E_1 (4 - \alpha) \Delta E/E_0. \quad (4.110)$$

Вводя прирост энергии

$$d\Delta E/dN = V_2 \cos \varphi_0 \Delta \varphi, \quad (4.111)$$

складывая (4.110) и (4.111) и дифференцируя по N , получаем

$$\frac{d^2 \Delta E}{dN^2} = V_2 \cos \varphi_0 \frac{d\Delta \varphi}{dN} - \frac{E_1 (4 - \alpha)}{E} \cdot \frac{d\Delta E}{dN}.$$

Исключаем $d\Delta \varphi/dN$, используя (4.86а) (с заменой переменных и $\eta = \alpha$), и получаем дифференциальное уравнение второго порядка для ΔE

$$\frac{d^2 \Delta E}{dN^2} + \frac{E_1}{E_0} (4 - \alpha) \frac{d\Delta E}{dN} + 2\pi \frac{h\alpha V_2 \cos \varphi_s}{E_0} \Delta E = 0, \quad (4.112)$$

которое обладает коэффициентом затухания, определяемым вторым членом

$$\alpha_s = \frac{E_1}{2E_0} (4 - \alpha) \quad (4.113a)$$

или, если записать через время релаксации,

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{P_\gamma}{2E_0} (4 - \alpha). \quad (4.113b)$$

Окончательно радиальное бетатронное затухание определится, если мы из полного затухания вычтем затухание, обусловленное вертикальными бетатронными колебаниями и синхротронными колебаниями:

$$\alpha_r = -\frac{E_1}{2E_0} (1 - \alpha) \quad (4.114a)$$

или

$$\frac{1}{\tau_r} = -\frac{P_\gamma}{2E_0} (1 - \alpha). \quad (4.114b)$$

Мы приходим к странному результату, а именно: для маленьких α (случай, существующий в синхротронах с переменными градиентами) радиальные бетатронные колебания раскачиваются. Физически это объясняется тем, что дополнительная кривизна, обусловленная колебаниями, увеличивает кривизну на большем радиусе (вне равновесной орбиты), при этом также увеличивается излучение. Излучение смещает эффективную равновесную орбиту внутрь, таким образом, увеличивая радиальное отклонение частицы от равновесной орбиты и, следовательно, увеличивая амплитуду колебаний. Именно в машинах с сильной фокусировкой и короткой длиной волны бетатронных колебаний проявляется этот эффект.

Для азимутально-симметричных ускорителей с постоянным градиентом результаты, полученные в (4.106), (4.114) и (4.113), следующие:

$$\frac{1}{\tau_z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_\gamma}{E_0}; \quad (4.115)$$

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1-n} \cdot \frac{P_\gamma}{E_0}; \quad (4.116)$$

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-4n}{1-n} \cdot \frac{P_\gamma}{E_0}. \quad (4.117)$$

Затухание бетатронных колебаний в этой форме было первоначально опубликовано Хенри [9]. Результаты в случае синхронных колебаний для азимутально-симметричных ускорителей были первоначально выведены Бомом и Фолди [1]. Мы применим эту запись уравнений в § 4.6 при обсуждении многооборотной инжекции, использующей радиационное затухание.

Гамильтонов формализм с учетом пространственного заряда. В § 1.3 показано, что в пределе равенства нулю корреляций между

отдельными частицами теорема Лиувилля может быть применена к шестимерному пространству, учитывающему силы, обусловленные пространственным зарядом. Однако потенциал, внутри которого движутся частицы, должен быть самосогласованным с движением. Самосогласованное движение обычно ведет к нестационарным потенциалам, которые в свою очередь ведут к зависящему от времени гамильтониану. Хотя теорема Лиувилля и может быть применена в этих случаях, однако адиабатическая теория, развитая в гл. 2, применена быть не может и «нитеобразование» ведет к увеличению области эффективного фазового пространства. Нильсен и Сесслер [21] рассматривали простое приближение, которое ведет к стационарной форме потенциала и, таким образом, является полезным при обсуждении эффектов в ускорителях, связанных с пространственным зарядом. Обсудим кратко это приближение и некоторые результаты, которые можно с его помощью получить.

Если предположить существование стационарного потенциала для сил, обусловленных пространственным зарядом, то гамильтониан в (4.89) примет вид

$$\bar{H} = \frac{\omega}{4\pi} \cdot \frac{d\omega}{dE} J^2 + \frac{eV}{2\pi h} f(\varphi) + eU(\varphi), \quad (4.118)$$

где $U(\varphi)$ — потенциал пространственного заряда, который может адиабатически изменяться за много периодов колебаний. Уравнение (4.118) эквивалентно уравнению Нильсена и Сесслера с небольшими изменениями в обозначениях и выборе произвольных констант. Функция $U(\varphi)$ включает интеграл по распределению заряда вида

$$U(\varphi) = \int K(\varphi, \varphi') \lambda(\varphi') d\varphi', \quad (4.119)$$

где $\lambda(\varphi')$ — заряд на единице длины и K — коэффициент пропорциональности. В дополнение к (4.118) имеем уравнение Лиувилля в двумерном фазовом пространстве, которое, описывая стационарную плотность в фазовом пространстве, удовлетворяет укороченной форме (1.86) без явной зависимости от времени:

$$\frac{\partial f}{\partial J} j + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = 0. \quad (4.120)$$

Если плотность f аппроксимируется однородным распределением внутри некоторой области с границей $J = J_b(\varphi)$ и нулем вне ее, то, предполагая $J_b > J$, можно записать

$$f(J, \varphi) = e\sigma S(J_b - J), \quad (4.121)$$

где σ — постоянная плотность в $J - \varphi$ -пространстве и S — ступенчатая функция. Покажем, что если f , определенная из (4.121), удовлетворяет (4.120), то J_b соответствует траектории постоянного гамильтониана

$$H(J_b, \varphi) = \text{const.} \quad (4.122)$$

Дифференцируя (4.121) по J и φ и подставляя в первый и второй члены (4.120) соответственно, получаем

$$\delta(J_b - J) \dot{J} - \delta(J_b - J) \frac{dJ_b}{d\varphi} \dot{\varphi} = 0.$$

Применяя гамильтоновы уравнения движения, получаем

$$\delta(J_b - J) \left[\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \frac{\partial H}{\partial J} \cdot \frac{\partial J_b}{\partial \varphi} \right] = 0. \quad (4.123)$$

Уравнение (4.123) удовлетворяется тождественно для $J \neq J_b$ в силу δ -функции. На границе $J = J_b$ член в скобках должен быть равен нулю, в результате чего получаем (4.122). Уравнение (4.121) является поэтому стационарным распределением, хотя остается вычислить действительную функцию потенциала. Если пренебречь влиянием фазовых колебаний на величины, кроме φ , плотность пространственного заряда можно связать с $\lambda(\varphi)$ приближенным соотношением

$$2e\sigma J_b d\varphi = \lambda(\varphi) dl = \lambda(\varphi) \frac{r}{h} d\varphi, \quad (4.124)$$

где r — радиус синхронной орбиты; h — номер гармоники высокочастотного поля. Подставляя (4.120) и (4.119) в (4.118) для $J = J_b$, получаем гамильтониан, описывающий граничную траекторию,

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{4\pi} \cdot \frac{c\omega}{dE} J_b^2 + \frac{eV}{2\pi h} f(\varphi) + \\ & + \frac{2e^2 \sigma h^2}{r_0} \int J_b(\varphi') K(\varphi, \varphi') d\varphi' = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Так как $K(\varphi, \varphi')$ изменяется медленно в силу того обстоятельства, что длина сгустка намного больше сечения вакуумной камеры, можно разложить $J_b(\varphi')$ около φ , чтобы убрать ее из интеграла:

$$\begin{aligned} \int J_b(\varphi') K(\varphi, \varphi') d\varphi' &= J_b(\varphi) \int K(\varphi, \varphi') d\varphi' + \\ &+ \left\| \frac{\partial J_b}{\partial \varphi} \right\| \int \|\varphi' - \varphi\| K(\varphi, \varphi') d\varphi' + \dots \end{aligned}$$

Оставляя только первый член и беря вместо K простую функцию, интеграл можно вычислить. Например, Нильсен и Сесслер выбрали заряд в виде однородного цилиндра между проводящими плоскостями, в результате чего получили

$$\int K(\varphi, \varphi') d\varphi' = \left(1 + \ln \frac{4z_w}{\pi a} \right) = g,$$

где z_w — половина расстояния до проводящих стенок вакуумной камеры; a — радиус заряженного цилиндра. Подставляя эти при-

ближения в (4.125), можно получить алгебраическую форму гамильтониана:

$$\frac{\omega}{4\pi} \cdot \frac{d\omega}{dE} J_b^2 + \frac{eV}{2\pi h} f(\varphi) + \frac{2e^2 \sigma h^2 g J_b}{r_0} = \text{const.} \quad (4.126)$$

Отметим, что приближения, ведущие к этой алгебраической форме, и начальное предположение для f (4.121) согласуются только в пределе бесконечной длины пучка. Однако эти приближения, кажется, не вводят значительных модификаций эффекта для $d\omega/dE > 0$ ($\eta > 0$). Выше энергии перехода, где $d\omega/dE < 0$ (область отрицательной массы), возникают трудности при решении.

Используя не зависящий от времени гамильтониан вида (4.126), можно рассмотреть различные проблемы. Например, Нильсен и Сесслер [20] рассчитывали влияние пространственного заряда на продольное движение частиц в ускорителях. Однако таким образом не всегда удастся рассмотреть коллективные явления, так как обычно они не соответствуют не зависящему от времени гамильтониану \bar{H} . Несмотря на общую трудность при рассмотрении коллективных явлений, этим методом были изучены некоторые неустойчивости. Нильсен, Сесслер и Саймон [21] рассматривали продольные неустойчивости, а Нейл и другие [19] использовали этот метод для изучения неустойчивостей в присутствии других возмущающих сил. Большая часть этих явлений поддается также анализу без привлечения гамильтонового формализма.

§ 4.3. Поперечное согласование в ускорителях

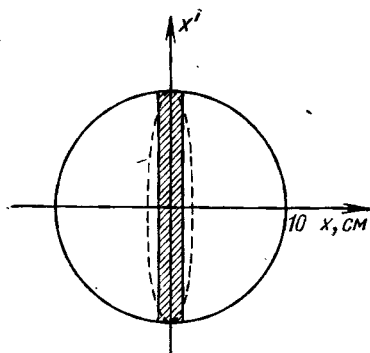
Введение. В § 4.1 и 4.2 мы рассматривали бетатронные и синхротронные колебания в синхротронах, последние в гамильтоновой форме, что непосредственно позволяет определить аксептанс вынужденных колебаний в фазовом пространстве. Для машин с азимутальной симметрией выражение (4.21а) с константой, равной χ_ω^2 , дает границу свободных колебаний в фазовом пространстве. Для синхротронов с переменными градиентами аксептанс свободных колебаний меняется в зависимости от положения плоскости инжекции. Диаграмма в фазовом пространстве может быть построена с помощью (4.32) при соответствующей $\beta(\theta)$ в зависимости от плоскости инжекции. Хотя реальный поперечный аксептанс зависит от совместного влияния свободных и вынужденных колебаний, мы будем рассматривать отдельно свободные колебания при описании процедуры согласования. Проблема связи различных типов колебаний будет подробно рассматриваться в § 4.5.

Чтобы определить порядок исследуемых величин, рассмотрим эмиттанс линейного ускорителя, который может быть использован в качестве инжектора электронного синхротрона на средние энергии, например, синхротрона с радиусом 10 м и максимальным магнитным полем 10 000 гс и конечной энергией около 3 Гэв. Пусть эмиттанс

На выходе линейного ускорителя имеет следующие параметры: радиус пятна пучка 1 см, угловая расходимость $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ рад. Тогда начальная функция $x' = 5 \cdot 10^{-3} r_0$, что дает $x' = 5$ см из (4.216). Если предположить для простоты $v_x = 0,5$, то расстояние до стенки вакуумной камеры от равновесной орбиты

$$x_w = [1 + (5/0,5)^2]^{1/2} \simeq 10.$$

На рис. 4.7 показан аксептанс (нормированный к кругу) вместе с эмиттансом (на рисунке заштрихован). Большие размеры вакуумной камеры (ширина 20 см) обусловлены значительным рассогласованием между формой аксептанса и эмиттанса. Рисунок для z -направления очень сходен с этим рисунком.



В принципе для преобразования фазового пространства эмиттанса в соответствии с фазовым пространством аксептанса можно использовать линзы. Это уменьшит эффективную область фазового пространства, занятую частицами, и приведет к значительному уменьшению размеров вакуумной камеры. Однако существуют два важных ограничения на системы преобразования фазового пространства: а) для увеличения размеров пучка требуются большие апертуры линз; б) трудность в достижении очень маленьких угловых расходимостей из-за абберации.

Рис. 4.7. Соотношение между поперечным эмиттансом (заштрихован), поперечным аксептансом азимутально-симметричного синхротрона (сплошная линия) и поперечным аксептансом синхротрона со знакопеременными градиентами (пунктирная линия).

К тому же при конструировании ускорителей большое значение имеет не только эффективная площадь фазового пространства, но и его форма, ибо большие объемы вакуумной камеры требуют затрат значительных мощностей, тогда как угловая расходимость приводит к колебаниям размеров пучка. Ясно, что было бы более желательно менять форму аксептанса. Это возможно с помощью фокусировки переменными градиентами, которая для средней частоты бетатронных колебаний $v_x = 5$ дает расстояние до стенок $x_{tw} \simeq \sqrt{2}$, как показано на рис. 4.7.

Эллипс аксептанса в синхротроне с переменными градиентами изменяется в зависимости от места инъекции по отношению к магнитам с переменными градиентами. На рис. 3.15 показано изменение фазового пространства в периодической квадрупольной системе, в нашем случае изменение фазового пространства аналогично этому примеру и зависит от конкретной конфигурации магнитов. Форма аксептанса, показанная на рис. 4.7 пунктирными линиями, является в действительности грубо средней между формой аксептанса в центре фокусирующей секции и в центре дефокусирующей секции с функ-

цией $\beta^{1/2}(\theta)$, описывающей флуктуацию координаты места инжекции. Другое отклонение от простой картинке, представленной на рис. 4.7, заключается в том, что эмиттанс пучка, выходящего из начального ускоряющего источника, обычно не является правильным эллипсом или прямоугольником, так как уже прошел через некоторую эквивалентную дрейфовую область. Даже если эмиттанс на выходе системы инжектора согласован с аксептансом синхротрона, имеется необходимость в значительном дополнительном дрейфе между источником и синхротроном, который требует фокусировки. Этот дополнительный дрейф обусловлен пространством, необходимым для инфлектора, совмещающего центр фазового про-

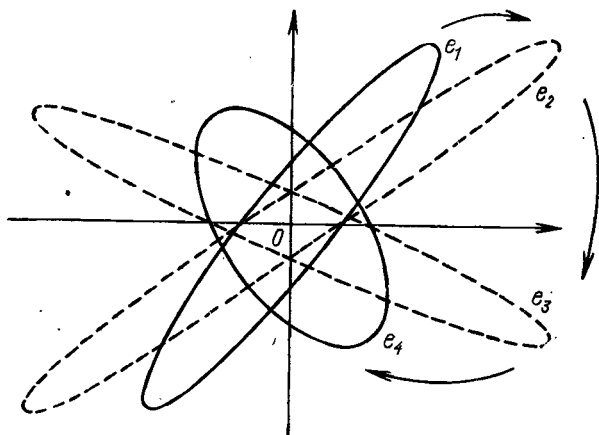


Рис. 4.8. Согласование поперечного фазового пространства (Хиуворд, Джонсон, Лапостолл, 1956 г.).

странства эмиттанса с равновесной орбитой. Сама по себе конструкция инфлектора очень сложна [15]. Проблема инфлектора будет рассмотрена кратко в § 4.6 в связи с многооборотной инжекцией.

С учетом всех упомянутых выше обстоятельств разработано преобразование фазового пространства от источника до синхротрона для реальных параметров ускорителя и инжектора в ЦЕРНе [10]. Такая диаграмма в фазовом пространстве представлена на рис. 4.8. Эллипс эмиттанса e_1 , уже представляющий расходящийся пучок, дрейфует до тех пор, пока не войдет в квадрупольный дублет e_2 , который преобразует его к e_3 , за которым следует второй дрейф к e_4 , являющийся аксептансом в прямой секции между фокусирующей и дефокусирующей секциями. Система линз, служащая для преобразования e_1 в e_4 , неоднозначна. Очень легко найти соответствующую систему тонких линз либо графически, либо с помощью техники импеданса. Однако фактические параметры дублета значительно отличаются от системы тонких линз и неизбежно влекут за собой трудоемкие вычисления. Для более полного описания расчета тонких линз читатель отсылается к монографии [29].

Поперечная фокусировка в линейных ускорителях. Обычно фокусировка в линейных ускорителях необходима для того, чтобы избежать большого увеличения размера пятна и угловой расходимости на его выходе, особенно, если он используется в качестве инжектора для синхротрона. В отличие от продольного движения, которое может быть описано с использованием техники фазового пространства, поперечное движение не описывается гамильтонианом, не зависящим от времени в течение одного радиального колебания. Причина этого различия заключается в том, что в первом порядке продольные колебания не зависят от поперечного движения, в то время как поперечные колебания непосредственно зависят от про-

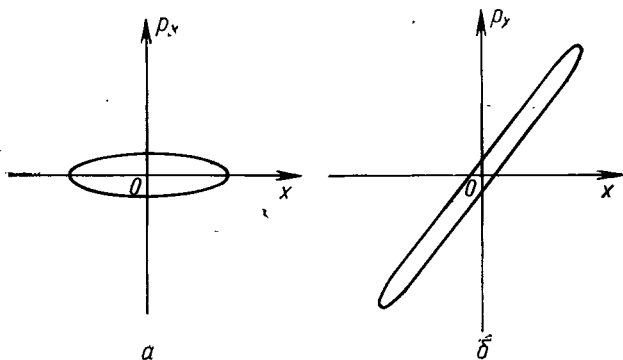


Рис. 4.9. Преобразование поперечного фазового пространства в линейном ускорителе до ускорения (а) и после ускорения (б).

дольной фазы. Свойства фокусирующей системы, служащей для поперечной фокусировки, обычно определяются из численных расчетов нескольких траекторий частиц. Однако можно получить значительную информацию, изучая диаграммы в фазовом пространстве.

Радиальное поле в линейном ускорителе, без учета влияния пучка, полученное Чу (1951 г.), с точностью до второго порядка по r (r — расстояние от оси):

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_z \frac{\pi r}{\lambda_g} \cos \varphi - \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \sin \varphi, \quad (4.127)$$

где λ_g — длина волны и φ — фаза высокочастотного поля. Если пучок сбунчирован так, что сгустки имеют однородную плотность заряда и форму эллипсоида, то соответствующие силы пространственного заряда также будут линейны по r по сечению пучка. Радиальное движение дается уравнением

$$\frac{dp_r}{dt} - mr\dot{\theta}^2 = e(\mathcal{E}_r + \mathcal{E}_r(s, c)) - e(r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta), \quad (4.128)$$

где в первом порядке $B_\theta = (1/c) \mathcal{E}_z(\pi r/\lambda_g)$. Если B_z — однородное фокусирующее поле, то все радиальные компоненты силы пропорциональны r . Этим фактом воспользовался Смартс [26] и проинтегрировал уравнение (4.128). Это и то обстоятельство, что силы аксиально-симметричны, допускают очень простую картину в фазовом пространстве. Считаем, что если скорости, обусловленные флуктуациями источника, незначительны на входе в ускоряющую область, то поперечное фазовое пространство после прохождения ускоряющей секции преобразуется так, что его радиус и радиальные скорости будут прямо пропорциональны радиусу на входе. Разделяя конфи-

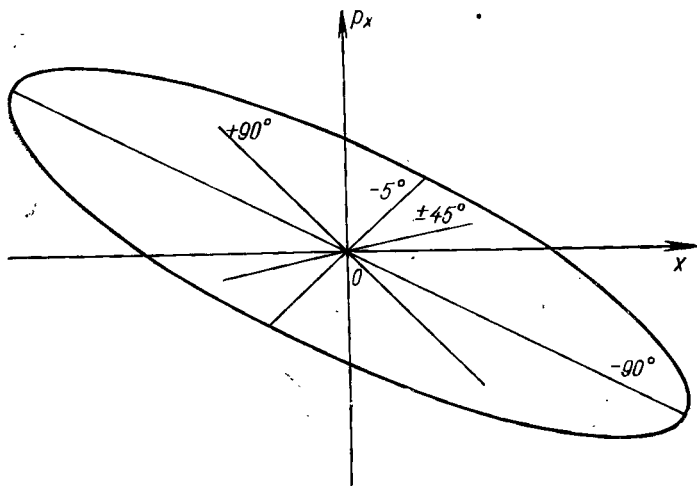


Рис. 4.10. Рост эффективного поперечного фазового пространства из-за продольного фазового пространства.

гурационное пространство на x - и y -компоненты, поперечное фазовое пространство, например, в x -направлении может быть представлено, как показано на рис. 4.9, *a* и *b* до и после ускорения. В пределах приближения линейной зависимости сил от r эллипс преобразуется не искажаясь; узкий эллипс на рис. 4.9, *b* можно сфокусировать линзами, расположенными между линейным ускорителем и синхротроном, для согласования с любой желаемой формой эллипса аксептанта. Единственное, что необходимо знать, — ориентацию эллипса.

Для разных фаз по отношению к ускоряющему высокочастотному полю ориентация эллипса на рис. 4.9, *b* различна. Например, используя данные вычислений Смартса на группирователе стэнфордского ускорителя, диаграмма может быть построена так, как показано на рис. 4.10. Как видно, увеличение эффективной площади фазового пространства является прямым следствием разброса продольных фаз. Поэтому уменьшение этого фазового пространства эквивалентно уменьшению разброса частиц по фазам. Это приводит нас

к продольному согласованию в фазовом пространстве, некоторые аспекты которого рассматривались в § 3.4 и будут рассматриваться в § 4.4.

Также возможно получить меньшие значения эффективного фазового пространства, вводя фокусирующие поля, такие, что $dp_r/dt = 0$. В этом случае (4.128) принимает вид

$$\dot{\theta}^2 + \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{r} (\mathcal{E}_r + \mathcal{E}_{r(s, c)}) - \frac{e}{m} \frac{1}{r} (r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta) = 0. \quad (4.129)$$

Применяя теорему Буша (сохранение углового момента) к аксиально-симметричному полю, имеем

$$\dot{\theta} = \frac{e}{2m} \left(B_z - \frac{r_k^2}{r^2} B_{zk} \right),$$

где индексом k отмечены величины для катода, и, предполагая, что поток, пронизывающий катод, равен нулю, можно выразить B_z через радиальные силы. Подставляя соответствующие выражения вместо \mathcal{E} , $\mathcal{E}_{r(s, c)}$ и B_θ с однородной пространственной плотностью заряда ρ , получаем выражение для B_z , выраженное через полную энергию частицы $E = E_0/(1 - \beta^2)$:

$$B_z = \left(\frac{2m_0}{e} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{\lambda_g} \cdot \frac{c}{v_0} \mathcal{E}_z \frac{E_0}{E} \cos \varphi - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \sin \varphi \frac{E}{E_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{E_0}{E} \right)^{1/2}. \quad (4.130)$$

Хотя силы уравниваются только для одного значения φ , это значение может быть выбрано так, чтобы предотвратить эллипсы для большинства значений φ от чрезмерного удлинения. Для электронов может быть использовано запрограммированное поле B_z , но для фокусировки ионов оно должно быть очень большим. Обычно для удержания частиц внутри линейного ускорителя служат магнитные квадрупольные системы, но они, как правило, не уменьшают фазового пространства на выходе. Однако хитроумным выбором квадрупольной фокусирующей системы и трудоемкими расчетами можно сконструировать систему, уменьшающую эффективную поперечную площадь фазового пространства. Такая программа для протонного линейного ускорителя была выполнена Смитом [27], который добился того, что эффективная площадь фазового пространства только ненамного превышает эффективную площадь фазового пространства для одной фазы инжекции.

§ 4.4. Продольное согласование

Введение. В § 4.3 рассмотрено поперечное согласование в фазовом пространстве, причем особое внимание было обращено на инжекцию в синхротрон. Хотя основное внимание в литературе уделено поперечному согласованию, значительное увеличение фа-

зового пространства обусловлено именно рассогласованием продольного фазового пространства. Причина того, что основное внимание уделялось поперечному согласованию, заключается в том, что поперечный эмиттанс часто сравним с поперечным аксептансом и, таким образом, рассогласование ведет к большим потерям частиц. Однако во многих случаях продольного согласования фазовое пространство аксептанса может быть на несколько порядков больше эмиттанса; поэтому рассогласование в фазовом пространстве, которое значительно увеличивает эффективное фазовое пространство, ведет к небольшим потерям частиц. В некоторых приложениях, например при многооборотной инжекции в синхротрон, которая подробно рассмотрена в § 4.6, уменьшение площади эффективного фазового пространства все-таки очень важно для процесса инжекции.

Остановимся на продольном согласовании в линейном ускорителе электронов. При рассмотрении фазовой группировки в § 3.4 мы уже касались одной стороны этой проблемы. Мы видели, что линейный ускоритель с ускоряющей волной, распространяющейся синхронно с частицей, имеет область фазовой устойчивости, расположенной около некоторой фазы ускоряющей волны. Но эмиттанс обычно определяется инжектором и поэтому распределен по всем фазам волны. Найдено, что высокочастотный резонатор — эффективное устройство для группировки большей части инжектированных частиц вокруг фаз, которые расположены внутри области устойчивости.

Первоначальная согласующая секция ускорителя сама группирует частицы по фазе и ее можно рассматривать как прибор, осуществляющий согласование в фазовом пространстве между эмиттансом и аксептансом. Принято ограничивать начальную напряженность поля в этой секции, чтобы уменьшить начальное отклонение импульса, возникающего из-за разброса по фазам, ибо, как следует из (4.72), пик разброса по импульсам прямо пропорционален корню квадратному из напряженности поля. Как мы увидим далее, последующее медленное увеличение напряженности поля приведет к небольшим изменениям импульса.

Анализ группирующей секции линейного ускорителя. Приближенное изменение фазы и энергии колеблющейся частицы было найдено в § 4.2 из линеаризованного уравнения движения с применением адиабатической теоремы. Формула (4.70) дает изменение амплитуды осциллятора в адиабатической переходной области

$$z_m \sim 1/(m_l \omega_s)^{1/2},$$

где ω_s — частота колебаний; m_l — продольная масса; для удобства обозначений опущена черточка над амплитудой возмущения z_m . Подставляя вместо m_l и ω_s их значения из (4.62) и (4.68) соответственно, получаем

$$z_m \sim \left(\frac{v_0}{e \mathcal{E} \omega \cos \varphi_0} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{3/8}, \quad (4.131)$$

которое дает изменение амплитуды в зависимости от изменения параметров ускорителя. Как и раньше, v_0 — скорость и φ_0 — фаза колеблющейся частицы; \mathcal{E} — максимальное значение ускоряющего поля; e — заряд частицы; ω — частота высокочастотного поля; c — скорость света. Вводя полную энергию E частицы с устойчивой фазой $\bar{E} = m_0 c^2 / (1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ и учитывая отношение параметров в конечной и начальной областях, получаем отношение начального разброса скоростей к конечному:

$$\frac{z_{mf}}{z_{mi}} = \left(\frac{E_i}{E_f} \right)^{3/4} \left(\frac{v_f \mathcal{E}_i \cos \varphi_i}{v_i \mathcal{E}_f \cos \varphi_f} \right)^{1/4}, \quad (4.132)$$

где индексы i и f означают соответственно начальные и конечные значения величин. Так как произведение $z_m p_m$ (также опущена черточка над p) должно оставаться постоянным в силу адиабатической теоремы, получаем изменение импульса с изменением параметров. Мы отмечали, что для небольших изменений импульса зависимость между изменением энергии и изменением импульса дается из разложения в ряд Тейлора как $\Delta E = v_0 p$. Заметим, что ΔE — изменение энергии в лабораторной системе, не равное \bar{H} — энергии осциллятора в движущейся системе. Из (4.132) и соотношения $z_m p_m = \text{const}$ вместе с пропорциональностью между ΔE и p получаем отношение разброса частиц по энергии в конечной области к начальной:

$$\frac{\Delta E_f}{\Delta E_i} = \left(\frac{v_f E_f}{v_i E_i} \right)^{3/4} \left(\frac{\mathcal{E}_f \cos \varphi_f}{\mathcal{E}_i \cos \varphi_i} \right)^{1/4}. \quad (4.133)$$

Теперь может быть получен разброс конечной фазы и энергии. Конечный разброс по фазам находят, комбинируя начальный разброс с фазовой группировкой, задаваемой выражением (4.133). Находя начальный разброс по энергиям для заданных начальных условий и подставляя это значение ΔE в (4.133), мы получаем разброс по энергиям в конце группирователя:

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_f = \left(\frac{m_0 e}{E_0^3 \omega} \right)^{1/2} (v_f v_i E_f E_i)^{3/4} \left(\frac{\mathcal{E}_f \mathcal{E}_i \cos \varphi_f}{\cos \varphi_i} \right)^{1/4} (f(\varphi_1))^{1/2}; \\ f(\varphi_1) = \cos \varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_{0i}) \sin \varphi_1 - \cos \varphi_{0i}, \end{aligned} \right\} \quad (4.134)$$

где φ_1 — фаза частиц на входе группирователя; считаем, что разброс по энергиям эмиттанта незначителен. Теперь мы имеем уравнение, с помощью которого можно определить характер варьирования параметров, чтобы добиться максимального группирования и минимального разброса по энергиям. Из (4.132) видно, что группирование требует большого отношения начального поля к конечному, а также, если частицы при инжекции нерелятивистские, хорошее группирование требует больших начальных скоростей. Так как ускоряющее поле \mathcal{E}_f ограничено, требование максимального группирования и минимального разброса по энергии сводится к тому, чтобы \mathcal{E}_i было сделано как можно маленьким. Используя (4.134), находят минимум ΔE_f по отношению к скорости, который имеет место

для маленьких значений начальных скоростей, что противоречит требованию (4.132). Однако скорость не является чувствительным параметром и при ее выборе руководствуются практическими соображениями. Если частицы выходят из источника с большим разбросом по энергиям, то начальное поле должно быть достаточно большим, чтобы захватить эти частицы, но обычно разброс незначителен. Минимальное значение поля, которое может быть получено в начале ускорителя, зависит от свойств ускоряющей структуры.

В приведенных выше рассуждениях, мы предположили адиабатичность области группирователя. Это предположение не является оправданной необходимостью, параметры могут значительно изменяться за одно фазовое колебание. Поэтому вернемся к § 2.3, в котором развита теория минимизации роста площади фазового пространства. В линейном приближении мы нашли, что если изменение R на единицу фазового изменения пропорционально самому R , т. е.

$$\frac{1}{k_s} \cdot \frac{dR}{dz} = \varepsilon R, \quad (4.135)$$

то рост площади фазового пространства может быть уменьшен, но этот рост обычно мал. Здесь $k_s = \omega_s/v_0$ — волновой вектор, ε — константа малости. Вводя величину отношения осей, которое, как видно из (4.67), равно $m_l \omega_s$, (4.135), становится

$$\frac{d}{dz} (m_l \omega_s) = \frac{\varepsilon m_l \omega_s^2}{v_0}. \quad (4.136)$$

Уравнение (4.136) должно решаться одновременно с уравнением движения частицы с устойчивой фазой. Преобразуем (4.56) и (4.136) так, чтобы они содержали только переменные p , \mathcal{E} , φ_0 и параметр ε . После некоторых алгебраических преобразований получаем уравнение силы

$$\frac{dp}{dz} = \frac{e\mathcal{E} \sin \varphi_0}{pc} (p^2 + m_0^2 c^2)^{1/2} \quad (4.137)$$

и уравнение постоянной степени изменения отношения осей

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{e \sin \varphi_0}{c} [(p^2 + m_0^2 c^2)^{1/2} p^{-2} \mathcal{E}^2 - 4 (p^2 + m_0^2 c^2)^{-1/2} \mathcal{E}^2] + \\ + 2\varepsilon (e\omega \cos \varphi_0)^{1/2} m_0 p^{-3/2} \mathcal{E}^{3/2}, \end{aligned} \quad (4.138)$$

которое является системой двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для p , \mathcal{E} и φ_0 с параметром ε . Затем, чтобы получить однозначное решение через ε , фиксируем φ_0 , а затем ε изменяем независимо, чтобы получить желаемый компромисс между сохранением фазового пространства и небольшой протяженностью секции группирования.

В качестве примера рассмотрим небольшой группирователь [18], который требует как ограничения по фазе, так и ограничения разброса по энергии. Его параметры: $P_{in} = 250$ квт; $E_{out} =$

$= 2 \text{ Мэв}$ (с нагрузкой пучком); $\mathcal{E}_f = 6 \text{ Мэв/м}$; $\mathcal{E}_i = 0,45 \text{ Мэв/м}$; $v_{0i} = 0,4 \text{ с}$; $\varphi_{0i} = \pi/4$; $\omega = 5 \cdot 10^{10} \text{ рад/сек}$. Максимальное поле определяется импедансом и мощностью на входе. Поле на входе было выбрано по возможности малым в соответствии с конструктивными особенностями. Значение начальной скорости является компромиссным между противоречивыми требованиями и той скоростью, которая может быть получена в реальных электронных пушках.

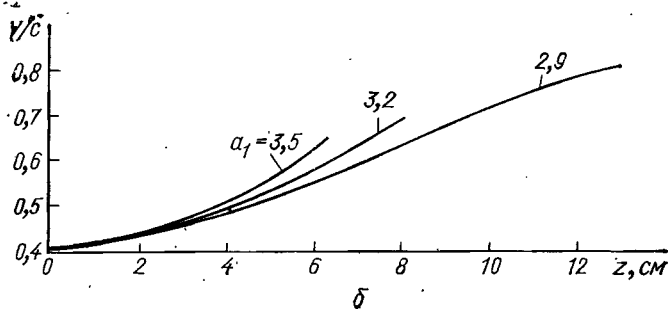
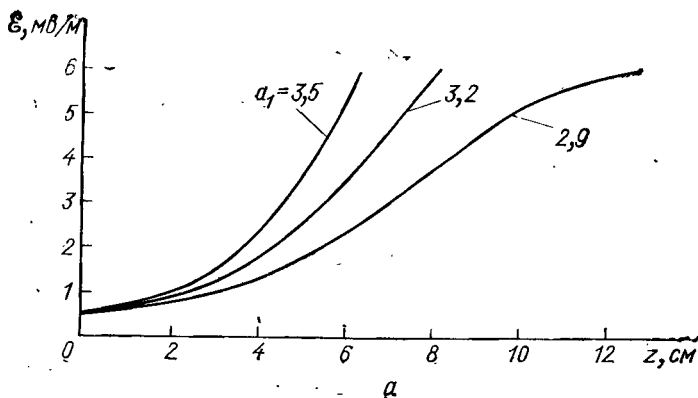


Рис. 4.11. Конструирование группирующей секции линейного ускорителя (а); изменение поля и скорости для минимизации роста продольного фазового пространства (б).

Следующее требование состоит в том, чтобы группирующая секция (область изменяющегося поля) была как можно короче, чтобы уменьшить полную длину ускорителя. Положение устойчивой фазы выбрано так, чтобы обеспечить достаточно широкий акцептанс [приблизительно 135° , как следует из (4.65)] и в то же время высокое начальное ускорение.

На рис. 4.11 нанесено изменение поля и скорости с расстоянием для различных значений параметра ϵ :

$$\alpha_1 = \epsilon (p_i / \mathcal{E}_i)^{1/2} (\omega \cos \varphi_0 / e)^{1/2} (1 / \sin \varphi_0).$$

Изменение a_1 сильно влияет на кривые в целом, но не оказывает заметного действия на их начальный наклон. Начальный наклон в первую очередь определяется начальными условиями. Изменение a_1 дает дополнительную степень свободы, с помощью которой можно либо варьировать длину группирующей секции до желаемого размера, либо обеспечить плавный переход в главную ускоряющую секцию. Для наших параметров все эти требования оказались совместимыми.

Теория группирователя проверяется непосредственным интегрированием уравнений движения с привлечением численных методов. Для расчета орбит, приведенных здесь, a_1 выбрано так, чтобы уменьшить разрыв в производной поля на краю группирующей секции. Шунтовый импеданс и длину потерь оставшейся части ускорителя считают постоянными, а скорость волны регулируют с тем, чтобы она оставалась синхронной с устойчивой по фазе частицей. Напряженность поля испытывает естественное затухание из-за потерь в волноводе. Интегрирование выполнено по всей длине (75 см) ускорителя, при этом кинетическая энергия частицы с устойчивой фазой на выходе ускорителя составляет 2,598 Мэв. Найдено, что область фазовой устойчивости смещается несколько дальше по волне в сторону более высоких скоростей. Область фазовой устойчивости больше ожидаемой как для разброса по импульсам, так и для разброса по фазам. Для частицы с устойчивой фазой при $\varphi = \pi/4$ и кинетической энергии инжекции 0,047 Мэв вычисленные из гамильтониана границы акцептанса дают, что устойчивые колебания частиц происходят между фазами $-0,05\pi$ и $0,75\pi$ при энергии, соответствующей устойчивой фазе, и с кинетическими энергиями в пределах 0,052—0,042 Мэв при положении устойчивой фазы. Вычисления на ЭВМ дают область устойчивости по фазам от $-0,015\pi$ и до $0,7\pi$ и по энергиям между 0,055 и 0,042 Мэв. Это свидетельствует об увеличении площади акцептанса приблизительно на 30%. Фазовая группировка и разрешение по энергиям на этих границах, однако, недостаточны, так что вычисления орбит, используемые для проверки теории группирователя, взяты для фаз в пределах от $-0,05\pi$ до $0,6\pi$. Проводилось два типа расчетов: один для определения эффективности фазового пространства, занятого частицами, которые в начальный момент распределены по всем фазам, но без разброса по энергии, и второй для определения эффективного фазового пространства всех частиц, заключенных внутри заданной начальной кривой постоянного гамильтониана. Первый расчет позволяет определить, какая часть эффективной площади в силу нитеобразования заполнена частицами. На рис. 4.12 орбиты на двух краях акцептанса нанесены на $\Delta E - \varphi$ -фазовой площади по отношению к частице с устойчивой фазой, здесь ΔE отсчитывается от энергии частицы с устойчивой фазой, а φ — фаза бегущей волны. Заштрихованная область — эллипс, внутри которого должны быть обнаружены частицы на выходе. Пунктирные линии — продолжение этих крайних орбит для линии постоянного гамильтониана

В приближении незначительных отклонений импульса во время колебаний. Мы видим, что начальная эффективная фазовая площадь (площадь, заключенная внутри орбиты частицы, соответствующей постоянному гамильтониану) больше, чем эллипс эмиттанса на выходе ускорителя (заштрихованная площадь). Значение эллипса эмиттанса заключается в том, что он является наименьшей областью, которая может быть согласована с фазовым пространством линейной системы, причем так, что будут захвачены все частицы. Для консервативных систем есть неравенства площадей фазового пространства

$$A_{\text{источника}} \leq A_{\text{эллипса эмиттанса}} \leq A_{\text{эффективный}}$$

при условии, что захватывается все фазовое пространство источника. Первое неравенство выполняется потому, что фазовое пространство, занятое частицами у источника, не может уменьшаться

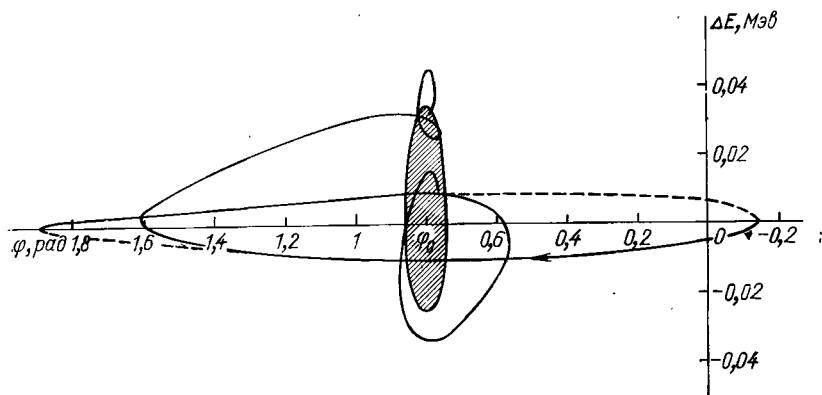


Рис. 4.12. Фазовые траектории в оптимально сконструированном линейном ускорителе.

в силу теоремы Лиувилля. Второе неравенство выполняется, так как эффективная площадь включает все эллипсы, по которым частицы могут колебаться, и, таким образом, должна включать эллипс эмиттанса.

Частицы попадают в группирователь, будучи разбросанными по фазам, но имея незначительный разброс по энергиям. Из-за последнего значительного рассогласования они совершают колебания по значительной площади в фазовом пространстве. Как описано в гл. 1 и 3, нелинейный характер силы, направленной к положению равновесия, ведет к нитеобразованию в фазовом пространстве. После многих колебаний частицы могут оказаться внутри любой маленькой области фазового пространства, ограниченной колебаниями. С другой стороны, если потенциальная яма изменилась неадиабатически до того, как фазовое пространство стало нитевидным, гамильтониан после изменения будет зависеть не только от началь-

ного гамильтониана частицы, но также от ее фазы. Таким образом, преобразование фазового пространства, в действительности занятого частицами, не будет тождественным преобразованию эффективного фазового пространства, связанного с начальными колебаниями. В гл. 3 эти связи обсуждались достаточно подробно.

Во втором расчете мы проверяли справедливость адиабатической теории определением преобразования всего эффективного фазового пространства. Этот расчет имеет также некоторые практические приложения в связи с использованием резонатора предварительного

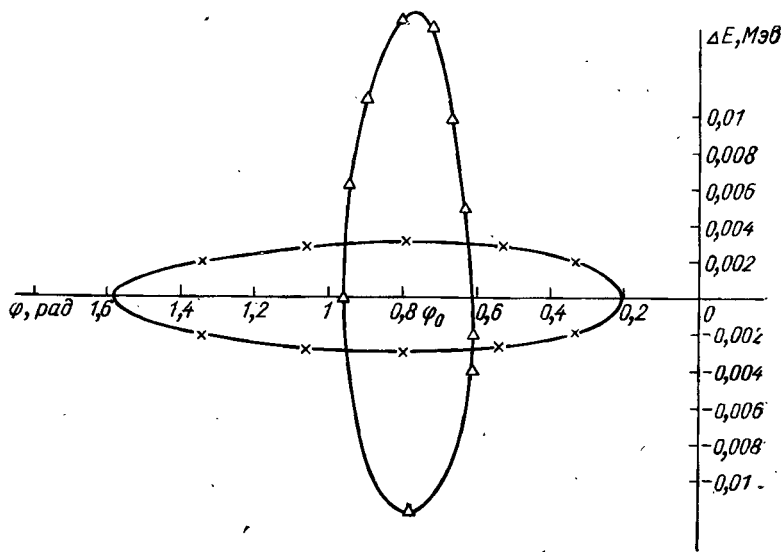


Рис. 4.13. Численный расчет преобразования продольного фазового пространства в линейном ускорителе.

группирователя с протонным линейным ускорителем. В этом случае разброс по энергиям предварительного группирователя может быть сравнимым с разбросом по энергии акселтанса группирователя. Так же, если объединить два этапа предварительного группирования, можно получить согласование отношения осей, которое эквивалентно тому, что мы делаем эффективную фазовую область и эмиттанс идентичными. Сначала проверим применимость результатов гл. 2, для этого вычислим $(1/\omega)(1/R)(dR/dt)$, что в нашем случае приблизительно равно $1/5$. Значение этой величины оправдывает процедуру разложения в ряд по крайней мере с точностью до членов второго порядка малости; это необходимо для вычисления роста площади фазового пространства. Из (4.99) находим, что рост площади фазового пространства составляет приблизительно 10%. Чтобы проверить теорию, выбираем квазилинейную область, т. е. область, в которой сила, направленная к положению равновесия,

линейно растет с расстоянием, хотя она и не является строго линейной. Поэтому ограничим рассматриваемую область фазового пространства гамилтонианом частицы, входящей при $\pi/2$ и без превышения скорости. Этот гамилтониан (кривая a) изображен на рис. 4.13. Затем вводим семейство частиц, начальные условия которых соответствуют этому значению гамилтониана (x -точки). Эти же самые частицы затем снова наносим в конце секции группирователя (Δ -точки) и, вычисляя площадь, находим, что рост площади фазового пространства составляет 10% от увеличения площади, найденного из линейной адиабатической теории, таким образом, подтверждая результаты даже для достаточно быстро изменяющихся параметров и в слабо нелинейной области.

§ 4.5. Использование распределений плотности в процедуре увеличения числа транспортируемых частиц

Введение. В § 4.3 и 4.4 рассмотрено согласование поперечного и продольного фазовых пространств в ускорителях. Мы нашли, что можно увеличить число частиц, инжектируемых в ускоряющую систему, согласовывая эмиттанс пучка с аксептансом ускорителя. Однако также очевидно (см. § 4.4 и обсуждение продольного согласования в § 3.4), что согласование определено однозначно только в том случае, если задана функция распределения внутри эмиттанса. Таким образом, для двумерного фазового пространства согласование заданного эмиттанса можно рассматривать следующим образом: нужно придать эмиттансу такую форму, чтобы увеличить число частиц, содержащихся внутри фазового пространства аксептанса. При изучении проблемы согласования эмиттанса линейного ускорителя с аксептансом синхротрона (см. § 4.3) найдено, что поперечное и продольное фазовые пространства нельзя рассматривать независимо. Как бетатронные, так и синхротронные колебания приводят к росту радиальных колебаний и поэтому при определении амплитуды радиальных отклонений их нужно рассматривать вместе. В том параграфе использована простая процедура для сложения амплитуд бетатронных и синхротронных колебаний, которая давала приближенный результат и максимизировала число захваченных частиц.

Рассмотрим распределение плотности внутри эмиттанса и разовьем процедуру получения преобразований плотности распределения после того, как частицы подверглись бетатронным и синхротронным колебаниям. Учтем также связь поперечного и продольного фазового пространства. Используем преобразование функции распределения при решении проблемы увеличения числа частиц, захваченных в синхротрон, по отношению к ускоряющему напряжению при инжекции. Число захваченных частиц является наибольшим для процедуры согласования, которая изменяет как форму эмиттанса, так и ускоряющее напряжение синхротрона. Однако реальный инжектор иногда может содержать преобразователь эмиттанса, а иногда нет, поэтому рассмотрим оба случая.

Можно изучить аналитически два предельных случая: когда нет корреляции между синхронными и бетатронными колебаниями и случай полной корреляции. Для этих случаев изменяем форму эмиттанта по мере того, как меняется напряжение. Эти простые случаи иллюстрируют используемые при этом методы, а также дают верхнюю и нижнюю границы оптимального ускоряющего напряжения при инжекции. Найдем также оптимальное напряжение для действующего синхротрона Кембриджского электронного ускорителя. В соответствии с реальной конструкцией инжектора эмиттанс в этом примере фиксирован, в то время как напряжение изменяется.

Далее все величины будем считать возмущениями около равновесной орбиты по отношению как к бетатронным, так и к синхротронным колебаниям. Таким образом, отклонение импульса Δp записывается как p , а отклонение положения Δq — как q . Мы интересуемся преобразованием распределения плотности фазового пространства эмиттанта $f_e(p_e, q_e)$ к усредненной по времени плотности $f(p, q)$ внутри синхротрона. Как уже показано в § 3.1, для колебательной системы часто можно упростить преобразование, используя новую переменную ζ , которая является радиус-вектором в фазовом пространстве от положения невозмущенной орбиты до кривой, на которой гамильтониан возмущенного движения постоянен. Затем можно проинтегрировать по второй переменной θ , которая описывает положение частицы вдоль кривой постоянного гамильтониана и поэтому является игнорируемой координатой при описании границ акцептанта колебательной системы.

Как и раньше, выразим распределение плотности через новые переменные соотношением

$$\tau(\zeta, \theta) = f(p, q) \frac{\partial(p, q)}{\partial(\zeta, \theta)}, \quad (4.139)$$

где предполагаем, что $\tau(\zeta, \theta)$ нормирована так, что

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \tau(\zeta, \theta) d\zeta = 1.$$

После преобразования переменных функции плотности распределения частиц в фазовом пространстве эмиттанта $f_e(p_e, q_e)$ по (4.139) новое распределение плотности $\tau_e(\zeta, \theta)$ нельзя рассматривать как функцию только переменных эмиттанта p_e, q_e . Это следует из того факта, что переменные ζ, θ зависят от формы кривых постоянного гамильтониана акцептанта. Рассмотрим сначала фазовое пространство, связанное с синхротронными колебаниями. Обозначим переменные фазового пространства через ζ_s, θ_s . Рассмотрим преобразование плотности частиц фазового пространства $\tau_e(\zeta_s, \theta_s)$ к усредненной по времени плотности внутри синхротрона $\tau(\zeta, \theta)$. Если обо-

значить через $\tau(\zeta)$ интеграл от $\tau(\zeta, \theta)$ по θ , то можно записать преобразование в следующем виде:

$$\tau(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta_s \int_0^{\infty} \tau_e(\zeta_s, \theta_s) \tau_c(\zeta | \zeta_s, \theta_s) d\zeta_s, \quad (4.140)$$

где $\tau_c(\zeta | \zeta_s, \theta_s)$ — условная вероятность нахождения частицы после преобразования в точке ζ , если до преобразования она находилась в точке ζ_s, θ_s . Если условная вероятность τ_c не зависит от θ_s , то фазовое пространство эмиттанта τ_e также может быть проинтегрировано по θ_s до интегрирования (4.140).

Нас интересует радиальное движение в синхротроне и таким образом мы рассматриваем четырехмерное фазовое пространство, которое описывает радиальное движение. Предполагаем, что поперечное и продольное фазовые пространства эмиттанта не коррелированы (хотя, конечно, эти фазовые пространства могут быть коррелированы в акцептансе). Обозначим максимальное радиальное отклонение любой частицы из-за синхротронных колебаний через r_s , а бетатронных колебаний — через r_b . Амплитуда r_s пропорциональна максимальному отклонению импульса p_m и, таким образом, пропорциональна ζ_s . Если частица с координатой ζ_1 в фазовом пространстве колеблется с амплитудой r_1 , то плотности, выраженные через r_s и ζ_s , связаны выражением

$$r_1 P_e(r_s, \theta_s) = \zeta_1 \tau_e(\zeta_s, \theta_s). \quad (4.141)$$

В синхротроне существуют два пути, по которым могут теряться частицы эмиттанта: они могут либо удариться о стенки вакуумной камеры, либо могут быть неустойчивы по отношению к синхротронным колебаниям.

Если условие синхротронной устойчивости ограничивает значение r_s , т. е. $r_s \leq \rho$, то усредненная по времени плотность в синхротроне $P_\rho(r)$, полученная из (4.140) и (4.141), имеет вид

$$P_\rho(r) = \int_0^{2\pi} d\theta_s \int_0^\rho P_e(r_s, \theta_s) P_e(r | r_s, \theta_s) dr_s, \quad (4.142)$$

где ρ определяется из уравнения для коэффициента расширения орбиты $\rho = (r_0 \alpha \Delta p_{\text{макс}}) / p_0$; $\Delta p_{\text{макс}}$ (или $p_{\text{макс}}$), в свою очередь, находится из вычисления гамильтониана для синхротронных колебаний, уравнение (4.896) для значений \bar{H} , соответствующего границе области фазовой устойчивости.

Полное число частиц внутри любого $r = r_w$ (в качестве r_w может быть использована полуширина вакуумной камеры)

$$N(r_w, \rho) = N_0 \int_0^{r_w} P_\rho(r) dr, \quad (4.143)$$

где N_0 — полное число частиц внутри эмиттанта. Затем мы можем, меняя ρ (связанное с ускоряющим напряжением синхротрона), увеличить $N(r_w, \rho)$.

Аналитическое рассмотрение двух предельных случаев. В этом параграфе мы оптимизируем число частиц в двух предельных случаях. В первом случае бетатронные и синхротронные колебания считаются некоррелированными. Это соответствует случаю, когда продольное фазовое пространство (ошибка в фазе и импульсе) ведет к синхротронным колебаниям, а поперечное фазовое пространство (радиальный разброс и угловая расходимость) — к бетатронным колебаниям*. Во втором случае поперечное фазовое пространство эмиттанта взято равным нулю, и все частицы инжектируются на главную орбиту. Продольное фазовое пространство, таким образом, ведет к полностью коррелированным бетатронным и синхротронным колебаниям. Мы предполагаем, что как продольная, так и поперечная плотность частиц в фазовом пространстве эмиттанта имеет вид

$$\tau_e(\xi, \theta) = \begin{cases} 1/2\pi\xi_1 & \xi < \xi_1; \\ 0 & \xi > \xi_1, \end{cases} \quad (4.144)$$

где константа ξ_1 различна для двух фазовых плоскостей. Это распределение плотности дает одинаковое число частиц на любой кривой постоянного гамильтониана. Если эмиттанс образуется за счет нитеобразования внутри инжектора линейного ускорителя, то кривые постоянного гамильтониана внутри инжектора имеют одинаковое число частиц. Для того чтобы это условие также выполнялось в синхротроне, все фазовые точки эмиттанта, которые соответствуют данному гамильтониану внутри инжектора, должны быть преобразованы так, чтобы они лежали на кривой постоянного гамильтониана внутри синхротрона. Если напряжение синхротрона изменяется, эмиттанс также должен быть изменен, чтобы поддерживать постоянной эту связь. Как только это сделано, константа ξ_1 выражения (4.141) неизбежно изменяется. В наших идеализированных примерах мы пренебрегаем изменением ξ_1 с изменением напряжения синхротрона. Природа этого приближения такова, что она ведет к переоценке оптимального напряжения и, таким образом, к переоценке ρ . Однако аналитическое рассмотрение все же позволяет определить верхнюю и нижнюю границы оптимального ρ . При численном определении оптимального напряжения (см. § 4.5) мы не будем делать предположение, что плотность не зависит от ρ .

Некоррелированные колебания. Интегрируя (4.144) по θ и используя (4.141), получаем нормированную плотность по отношению к r как для синхротронных, так и для бетатронных колебаний:

* Продольное фазовое пространство ведет к бетатронным колебаниям, возникающим из-за того, что частицы инжектированы на главную орбиту, которая совершает колебания около их равновесной орбиты. Однако, как указывалось некоторыми авторами (см., например, [14]), эти колебания могут быть устранены центрированием поперечного фазового пространства на его собственной равновесной орбите для данного продольного импульса.

$$P_1(r_s) = \begin{cases} 1/\beta & r_s < \beta; \\ 0 & r_s > \beta; \end{cases} \quad (4.145)$$

$$P_2(r_b) = \begin{cases} 1/\gamma & r_b < \gamma; \\ 0 & r_b > \gamma. \end{cases}$$

Здесь β — максимальная амплитуда синхротронных колебаний (возникающих от продольного фазового пространства) и γ — максимальная амплитуда бетатронных колебаний (возникающих от поперечного фазового пространства). Для некоррелированных колебаний r_s и r_b связаны соотношением

$$r = r_s + r_b, \quad (4.146)$$

так как плотность эмиттанта, ведущая к синхротронным и бетатронным колебаниям, некоррелирована, подстановка (4.146) в (4.142) ведет к интегралу

$$P_\rho(r) = \int_0^\rho P_1(r_s) P_2(r-r_s) dr_s, \quad (4.147)$$

где значения P даны в (4.145). Выполняя интегрирование в (4.147) и подставляя полученное значение $P_\rho(r)$ в (4.143), получаем

$$N(r_w, \rho) = N_0 \left[\int_0^\gamma \frac{r dr}{\beta \gamma} + \int_\gamma^\rho \frac{dr}{\beta} + \int_\rho^{r_w} (p - \gamma - r) \frac{dr}{\beta \gamma} \right], \quad (4.148)$$

где для определенности мы предположили $\rho \geq \gamma$. Максимизируя $N(r_w, \rho)$ по отношению к ρ , мы находим, что для максимального N

$$\rho = r_w, \quad (4.149)$$

результат не изменяется при $\rho < \gamma$. Значение ρ , полученное в этом приближении, слишком большое, но оно позволяет определить верхний предел напряжения инжекции.

Полностью коррелированные колебания. Если как бетатронные, так и синхротронные колебания возникают от продольного фазового пространства, то каждая точка в этом фазовом пространстве однозначно определяет максимальное радиальное колебание r . Поэтому нет необходимости выполнять интегрирование, обозначенное в (4.142); следует найти $P_\rho(r)$ прямо из распределения плотности частиц в фазовом пространстве и соотношения между r , ζ_s и θ_s . Считаем, что плотность задается выражением (4.144), тогда для полного числа частиц в элементе площади дается выражение

$$dN = (N_0/2\pi\beta) dr_s d\theta_s, \quad (4.150)$$

где использована зависимость между ζ_s и r_s , чтобы dN выразить через r_s . Амплитуда радиальных бетатронных колебаний r_b пропорцио-

нальна величине импульса в момент инжекции и, таким образом, пропорциональна $\zeta_s \|\sin \theta_s\|$. Поэтому можно записать амплитуду бетатронных колебаний как $r_b = r_s \|\sin \theta_s\|$. Тогда полная амплитуда колебаний

$$r = r_s + r_b = r_s (1 + \|\sin \theta_s\|). \quad (4.151)$$

Полное число частиц внутри любого r_w может быть найдено интегрированием (4.150), где верхний предел интегрирования находится из (4.150) с $r = r_w$, с ограничением, что r_s не может превышать ρ . Мы получаем

$$N(r_w, \rho) = \begin{cases} \frac{2N_0}{\pi\beta} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{r_w/(1+\sin\theta)} dr_s & 0 < r_w < \rho; \\ \frac{2N_0}{\pi\beta} \int_0^{\sin^{-1}[(r_w-\rho)/\rho]} d\theta \int_0^{\rho} dr_s + \\ + \frac{2N_0}{\pi\beta} \int_{\sin^{-1}[(r_w-\rho)/\rho]}^{\pi/2} d\theta \int_0^{r_w/(1+\sin\theta)} dr_s & \rho < r_w < 2\rho. \end{cases} \quad (4.152)$$

Выполняя интегрирование, находим, что $N(r_w, \rho)$ существенно постоянна внутри области $r_w/2 < \rho < r_w$ и резко спадает вне этой области. Так как выбранное распределение плотности превышает значение ρ , $N(r_w, \rho)$ действительно достигает своего максимума в

$$\rho = r_w/2. \quad (4.153)$$

Это нижний предел ρ , который выполняется при полной корреляции между бетатронными и синхротронными колебаниями. В этом примере максимальная амплитуда бетатронных колебаний равна ρ .

Численное определение оптимального напряжения. Рассмотрим синхротрон, в котором бетатронные колебания возникают как от поперечного, так и от продольного фазового пространства эмиттанса. Нормированные распределения плотности частиц в фазовом пространстве эмиттанса задаются функциями $f_1(p_1, q_1)$ и $f_2(p_2, q_2)$, где индексы 1 и 2 означают продольное и поперечное фазовые пространства соответственно. Используя (4.139) и (4.140), преобразуем плотность эмиттанса в продольном фазовом пространстве к $P_1(r_s, \theta_s)$. Запишем через переменные эмиттанса r_s, θ_s, p_2 и q_2 , тогда амплитуду бетатронных колебаний можно задать выражением

$$r_b = [(r_s \sin \theta_s - q_2)^2 + (kp_2)^2]^{1/2}, \quad (4.154)$$

где $r_s \sin \theta_s$, как и раньше, является отклонением равновесной орбиты от главной орбиты; q_2 — радиальное отклонение начального положения частицы от главной орбиты и k — постоянная, характеризующая ускоритель, так что kp_2 — амплитуда бетатрон-

ных колебаний, которая возникла бы только от поперечного отклонения импульса. Если предположить, что частоты бетатронных и синхротронных колебаний некоррелированы, то полная амплитуда колебаний частицы $r = \dot{r}_s + r_b$ или

$$r = r_s + [(r_s \sin \theta_s - q_2)^2 + (kp_2)^2]^{1/2}. \quad (4.155)$$

Используя (4.155), чтобы исключить p_2 из $f(p_2, q_2)$, и интегрируя по q_2 , получаем соотношение вида

$$P_2(r, r_s, \theta_s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p_2, q_2) (\partial p_2 / \partial r) dq_2, \quad (4.156)$$

где p_2 и $\partial p_2 / \partial r$ — функции r, r_s, θ_s и q_2 . Теперь $P_2(r, r_s, \theta_s)$ просто $P_c(r | r_s, \theta_s)$; подставляя в (4.142), мы получаем:

$$P_\rho(r) = \int_0^{2\pi} d\theta_s \int_0^\rho P_1(r_s, \theta_s) dr_s \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p_2, q_2) (\partial p_2 / \partial r) dq_2. \quad (4.157)$$

Полное число частиц внутри любого $r = r_w$ тогда можно найти из (4.143). Уравнения (4.157) и (4.143) в общем случае должны решаться численно.

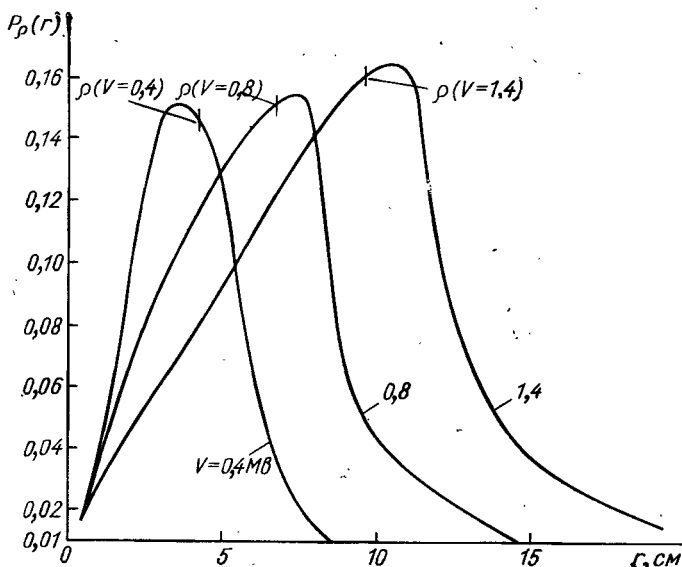


Рис. 4.14. Значение плотности заряда в зависимости от радиуса для трех значений приложенного напряжения (численный расчет).

В качестве примера рассчитаем оптимальное напряжение инжекции Кембриджского электронного ускорителя-синхротрона с сильной фокусировкой. Используемая полуширина вакуумной камеры составляет $r_w = 6,3$ см. Параметры ускорителя таковы, что откло-

нение энергии на $0,5 \text{ Мэв}$ вызывает радиальные синхротронные колебания с $r_s = 5,1 \text{ см}$, угловая расходимость $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$ приводит к амплитуде бетатронных колебаний $r_b = 1,78 \text{ см}$. Напряжение, соответствующее устойчивой фазе, необходимое для установления правильной степени изменения энергии при инжекции, составляет $0,1 \text{ Мэв}$. Характеристики эмиттанса таковы, что разброс по энергиям составляет приблизительно 1 Мэв для всех фаз синхротрона; угловая расходимость носит гауссовский характер и в точках, где интенсивность составляет половину интенсивности пучка, равняется $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$. Начальный радиальный разброс q_2 мал и при анализе его можно не

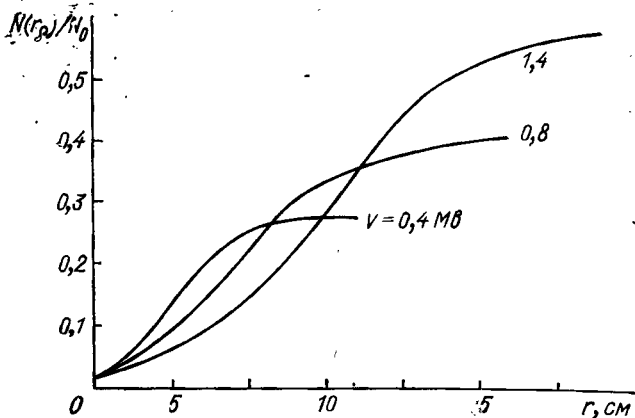


Рис. 4.15. Доля заряда, захваченного на данный радиус, для нескольких значений приложенного напряжения.

учитывать. Мы видим из (4.155), что для значений перечисленных выше параметров радиальные бетатронные колебания слегка больше радиальных синхротронных колебаний. Вычисленные значения плотности заряда в зависимости от радиуса нанесены на рис. 4.14 для трех значений приложенного напряжения V . Обозначены также величины ρ для каждого напряжения. Доля захваченных частиц в зависимости от радиуса нанесена на рис. 4.15 для трех распределений. Оптимальным приложенным напряжением является то, которое захватывает наибольшее число частиц внутри r_w . Значение напряжения, при котором захватывается наибольшее число частиц, определяется из графика интерполяцией. Для используемой полуширины в $6,3 \text{ см}$ оптимальное приложенное напряжение V и доля эмиттанса, захваченная при этом оптимальном напряжении, оцениваются из рис. 4.15 и составляют

$$V = 0,35 \text{ Мэв}, \quad N(r_w, \rho)/N_0 = 0,23,$$

а соответствующее значение ρ

$$\rho = r_w/1,8. \quad (4.158)$$

Сравнивая (4.149), (4.153) и (4.158), видим, что, как и ожидалось, значение ρ для частичной корреляции лежит между значениями ρ , найденными при отсутствии корреляции и в случае полной корреляции.

§ 4.6. Многооборотная инжекция в магнитные кольца

Общие соображения. Плотность частиц, которая может быть инжектирована в магнитное кольцо в течение одного оборота, ограничена рядом факторов. В случае электронных синхротронов ограничением является мощность, необходимая для ускорения частиц до соответствующей энергии инжекции. Например, если в качестве инжектора используется линейный ускоритель, то практический предел порядка $1/4 a$ за один оборот. Для протонного синхротрона главным ограничением является число протонов, которое может быть получено из источника. При низких энергиях для обоих типов синхротронов пространственный заряд ограничивает ток инжекции. Сила, обусловленная поперечным пространственным зарядом, стремится к нулю, когда скорость частиц приближается к скорости света.

В синхротроне ограничение, связанное с пространственным зарядом, обычно не так строго. В электронных синхротронах на большие энергии частицы инжектируются при $v \cong c$, таким образом, эффекты, обусловленные пространственным зарядом, малы. В протонных синхротронах ускорение в силу некоторых факторов достаточно медленно, что делает терпимыми требования к мощности, потребляемой при ускорении. Не вдаваясь в подробное обсуждение всех возможностей, констатируем, что для обоих типов ускорителей существуют области значений параметров, в которых число частиц, которое может быть ускорено, ограничено числом частиц, которое может быть инжектировано за один оборот. Именно в этих случаях схемы многооборотной инжекции кажутся привлекательными.

Еще одно применение многооборотная инжекция находит в случае накопления частиц при фиксированной энергии. Накопительные кольца были первоначально предложены для использования в экспериментах со встречными пучками [22]. Инжектируя частицы в пересекающиеся кольца магнитов, движение частиц в которых происходит во встречных направлениях, можно получить энергии взаимодействий, равные сумме индивидуальных энергий, в противоположность случаю взаимодействия ультрарелятивистских частиц с покоящимися. В этих случаях достижимые энергии взаимодействий значительно меньше. Накопительные кольца также используются для увеличения среднего тока пучка линейного ускорителя путем накопления пучка за многие циклы инжекции.

Основным ограничением многооборотной инжекции является невозможность наложить фазовое пространство, занимаемое эмиттансом одного оборота, на фазовое пространство, занятое эмиттансом второго оборота. Это ограничение подробно рассмотрено в предыдущих главах, но в случае конкретного процесса инжекции

мы получаем дополнительное понимание физики этого явления. Если частицы инжектируются в статическое поле, то они будут совершать колебания около равновесной орбиты, в конце концов возвращаясь к инфлектору, где они будут потеряны. Эта потеря может быть предотвращена смещением равновесной орбиты от инфлектора. Однако, если начальные отклонения положения и скорости (образующие эмиттанс фазового пространства) приведут к таким амplitудам колебаний, которые заполнят имеющуюся апертуру (аксептанс фазового пространства), смещение равновесной орбиты сместит частицы в область вне этой апертуры, где они будут потеряны.

Эмиттанс должен быть достаточно мал, с тем чтобы его можно было сместить от инфлектора, но он должен оставаться после смещения внутри аксептанса. Реальный аксептанс в присутствии инфлектора, использующего статические поля, меньше, чем аксептанс с однооборотной инжекцией, в которой инфлектор выключается через промежуток времени короче времени оборота частицы. В обсуждаемом здесь случае инфлектор заполняет часть апертуры, уменьшая таким образом площадь аксептанса. В многооборотной инжекции фазовое пространство каждого оборота смещается так, чтобы освободить фазовое пространство для последующих оборотов. Если смещение равновесной орбиты происходит медленно по сравнению с периодом бетатронных колебаний, то движение можно считать адиабатическим и оно не приведет к новым колебаниям. Можно сместить равновесную орбиту от инфлектора, смещая всю орбиту путем изменения ведущего поля. Другим методом служит введение зависящего от времени возмущения магнитного поля, которое воздействует на равновесную орбиту около инфлектора. Первый метод может быть использован в азимутально-симметричных ускорителях, но он нецелесообразен для магнитов с переменными градиентами, так как в силу маленького коэффициента расширения орбиты маленькие смещения орбиты требуют больших изменений магнитного ведущего поля.

Для азимутально-симметричных ускорителей амплитуда колебаний обычно достаточно велика, так что площадь эффективного фазового пространства эмиттанса после инжекции заполняет большую часть аксептанса машины. Мы видели, что для машин с переменными градиентами амплитуда колебаний значительно меньше, амплитуда уменьшается пропорционально частоте бетатронных колебаний или пропорционально квадрату синхротронных колебаний. Это уменьшение амплитуды используется для уменьшения размеров вакуумной камеры, что значительно снижает стоимость машин с большим радиусом. Однако эффективное фазовое пространство, занятое эмиттансом, может быть значительно уменьшено правильным согласованием фазового пространства в инжекторе. В первую очередь это касается продольного фазового пространства. Предположим, что фазовое пространство эмиттанса достаточно уменьшено, и проиллюстрируем процесс заполнения фазового пространства при многооборотной инжекции.

Если фазовое пространство эмиттанса недостаточно мало для осуществления многооборотной инжекции, оно может по крайней мере теоретически быть уменьшено использованием негамильтоновых сил (см. § 1.2). Этот метод удобен для высокоэнергетичных электронных накопительных колец, когда велико затухание, обусловленное излучением, например, для накопительных колец, используемых с электронным линейным ускорителем в Стэнфорде. Проблемы, связанные с многооборотной инжекцией в стэнфордском проекте, достаточно полно изложены в литературе [22]. Мы вернемся к обсуждению этого процесса инжекции после рассмотрения случая, в котором эмиттанс достаточно мал, так что может быть инжектировано много оборотов до того, как заполнится фазовое пространство аксептанса.

Заполнение фазового пространства в азимутально-симметричных ускорителях. Здесь рассмотрение будет ограничено поперечным фазовым пространством. Можно считать, что синхротронные колебания, связанные с продольным фазовым пространством, смещают равновесную орбиту и, таким образом, еще больше уменьшают полезную апертуру. При многооборотной инжекции можно предположить, что частота бетатронных колебаний и частота азимутального вращения не кратны одна другой. Таким образом, инжектируемое фазовое пространство в течение нескольких оборотов может пройти мимо инфлектора конечной длины и не задеть его, за это же время равновесная орбита сместится настолько, что эмиттанс пройдет мимо инфлектора. Пример, который будет рассмотрен, заимствован из исследований [32] для 12,5 Гэв протонного синхротрона с нулевым градиентом. Вертикальная фокусировка осуществляется краевым полем магнита, разделенного на квадранты. (Более подробное изложение этого дано в работе [15].)

На рис. 4.16 показано поперечное сечение вакуумной камеры с поперечным сечением инфлектора $ABCD$ и с соответствующими радиальным и вертикальным фазовыми пространствами. Пространство z -плоскости для соответствия с поперечным сечением камеры показано повернутым относительно начала координат на 90° . Равновесная орбита расположена в начале координатной системы и выведена из центра вакуумной камеры с тем, чтобы впоследствии она могла бы быть смещена к центру камеры, и «увести» частицы от области инфлектора. Выбрано $v_x = 3/4$ и $v_z = 7/8$, так что после восьми оборотов эллипс начального эмиттанса вернется в свое первоначальное положение. Заштрихованные эллипсы эмиттанса выбраны достаточно большими и имеющими форму, способствующую захвату максимального числа частиц при заданной плотности в фазовом пространстве. На рис. 4.16 показаны положения эллипсов эмиттанса через половину периода обращения по орбите и соответствующее сечение пучка $A'B'C'D'$. На рис. 4.17 дана проекция эмиттанса на радиальную фазовую плоскость для первых восьми оборотов. Мы видим на соответствующем поперечном сечении вакуумной камеры (см. рис. 4.17), что поперечное сечение пучка не перекрывает ин-

флектор в течение первых семи оборотов и проектируется на него на восьмом. Площадь фазового пространства выбрана достаточно малой, так что частицы не задевают ни инфлектора, ни стенок вакуумной камеры. В приведенных выше рассуждениях считалось, что длина инфлектора незначительна по сравнению с периодом колебаний, что и наблюдается в конструкциях реальных машин.

Для того чтобы эмиттанс прошел мимо инфлектора на восьмом обороте, равновесная орбита должна быть сдвинута внутрь на расстояние, равное ширине инфлектора, что указывалось ранее. Одна-

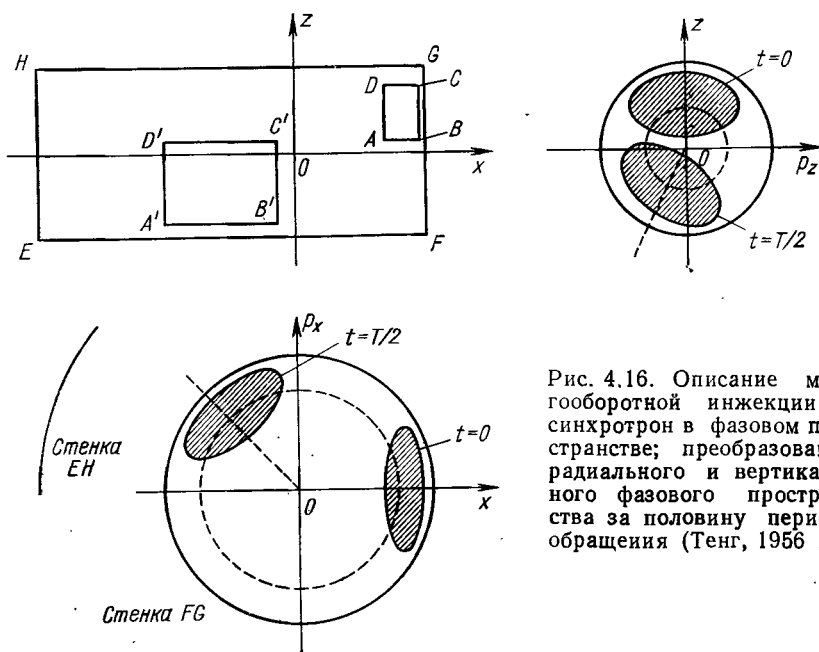


Рис. 4.16. Описание многооборотной инжекции в синхротрон в фазовом пространстве; преобразование радиального и вертикального фазового пространства за половину периода обращения (Тенг, 1956 г.).

ко это оказывает влияние на последующие обороты, требуя некоторой дополнительной площади в фазовом пространстве. В рассмотренном примере было достаточно места для смещения группы из семи оборотов от инфлектора. Можно продолжить процесс при условии, что вакуумная камера достаточно велика. В любом случае фазовое пространство эмиттанса должно поддерживаться достаточно малым, чтобы требуемое число оборотов соответствовало имеющейся в нашем распоряжении площади.

• Если нельзя пренебречь азимутальными размерами инфлектора, анализ усложняется. В следующем пункте мы обсудим этот случай вместе со способами смещения орбиты. Для простоты пренебрежем фазовым пространством эмиттанса.

Многооборотная инжекция в магнитное кольцо с переменными градиентами. Если выбрать бетатронную частоту близкой к сум-

мовому резонансу, то небольшие возмущения поля приведут к большим возмущениям орбиты при условии, что орбитальная частота близка к кратной от бетатронной частоты, как показано на рис. 4.18. Частицы, вышедшие в вакуумную камеру из центра инфлектора, будут совершать бетатронные колебания около равновесной орбиты с амплитудой, равной расстоянию от центра инфлектора до равно-

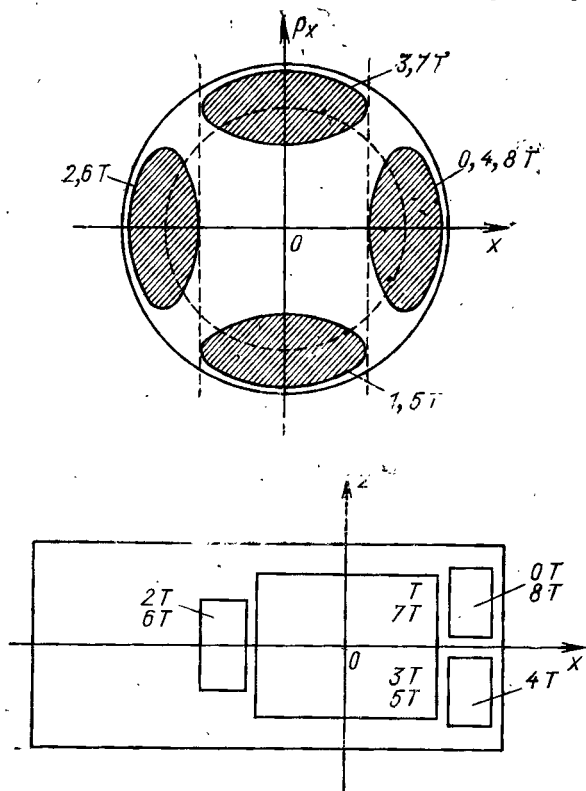


Рис. 4.17. Описание инъекции восьми оборотов в синхротрон в фазовом пространстве (Тенг, 1956 г.).

весной орбиты. При таком рассмотрении предполагается, что фазовая площадь равна нулю в каждой фазовой плоскости. После определенного числа оборотов частицы достигнут максимального отклонения от равновесной орбиты в окрестности инфлектора. За это время равновесная орбита должна быть смещена в такой степени, чтобы частицы проходили мимо инфлектора. Это может быть сделано либо уменьшением возмущения, либо смещением бетатронной частоты от частоты суммового резонанса.

Разовьем эти идеи количественно, используя теорию вынужденных колебаний, рассмотренную в § 4.1. Аппроксимируем уравнение вынужденных колебаний его гладким приближением

$$(d^2y/d\theta^2) + v^2 y = F(\theta), \quad (4.159)$$

где в качестве $F(\theta)$ выбрано возмущение поля в одной секции магнита

$$F(\theta) = \begin{cases} r_0 \frac{\Delta B}{B_0} & -\frac{\pi}{N} \leq \theta \leq \frac{\pi}{N}; \\ 0 & \text{вне этой области,} \end{cases} \quad (4.160)$$

где N — число секций с переменными градиентами. Уже найдено решение в Фурье-представлении

$$y_p(\theta) = r_0 \frac{\Delta B}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v^2 - n^2} \cdot \frac{\sin \pi n/N}{n\pi} \cos n\theta, \quad (4.161)$$

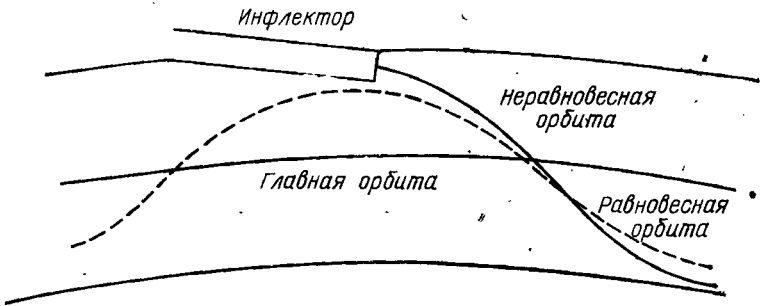


Рис. 4.18. Равновесная орбита в случае многооборотной инжекции в синхротрон со знакопеременными градиентами.

где основной вклад в сумму дает член с $n \simeq v$. Найдена также замкнутая форма решения

$$y_p(\theta) = (\pi/2v \sin \pi v) \int_{-\pi}^{\pi} \cos v\varphi F(\theta - \varphi) d\varphi.$$

Как видно, $y_p(\varphi)$ носит характер колебаний с бетатронной частотой, модулированных с частотой обращения. Фазовый сдвиг происходит внутри области возмущения. Если v близка к n , то фазовый сдвиг в этой области мал и амплитуда колебаний возмущенной орбиты большая. Если v не близка к n , то фазовый сдвиг должен быть большим, но так как маленькие возмущения поля приводят к маленькому возмущению орбиты, амплитуда колебаний орбиты, следовательно, мала. Однако нельзя сделать возмущение орбиты произвольно большим. Неизбежные искажения магнитного поля ведут к дополнительным колебаниям равновесной орбиты, фаза которых неконтролируема. Амплитуду этих колебаний нужно поддерживать небольшой по сравнению с желаемой.

Проиллюстрируем эти эффекты на примере электронов с энергией 500 Мэв в поле 10^4 гс с $N = 100$. Выберем показатель поля

таким, что $n_\nu = 10$, а $\nu - n_\nu = 0,1$. Учитывая только наиболее существенный член в выражении для y , из (4.161) находим, что

$$y_{\max} = r_0 (\Delta B/B) \{1/[2(\nu - n_\nu) N]\}. \quad (4.162)$$

Подставляя численные значения, находим, что

$$y_{\max} \cong 10^{-2} (\Delta B/B).$$

Если поле изменилось по направлению в одной секции, то $\|\Delta B/B\| = 2$, а возмущение поля действует сходно с дельта-функцией, в результате $y_{\max} = 2$ см. Этот результат можно сравнить с расчетом возмущения орбиты, возникающего из-за расстройки магнита [6]:

$$y_{Ave} \cong 10 \langle \Delta y \rangle_{rms}, \quad (4.163)$$

где $\langle \Delta y \rangle_{rms}$ — среднеквадратичная расстройка. Для наших параметров имеем

$$y_{Ave} \cong 10 \langle \Delta y \rangle_{rms}.$$

Для $\langle \Delta y \rangle_{rms} = 0,2$ мм это дает отклонение орбиты 0,2 см. Можно добиться желаемого возмущения, если вводить дополнительные секции с противоположным по направлению магнитным полем в соответствующих местах по азимуту.

Предположим теперь, что амплитуды колебаний, обусловленных фазовым пространством эмиттанта, малы по сравнению с шириной инфлектора, и подсчитаем число оборотов, которое можно инжектировать. Для случая $\nu - n_\nu = 0,1$ фазовый сдвиг за один оборот составляет $\pi/5$. Если к тому же инфлектор расположен над медианной плоскостью и $\nu_z = n_\nu + 1/2$, то частицы пройдут мимо инфлектора на первом обороте из-за колебаний в z -направлении и дадут за два оборота полный фазовый сдвиг $2\pi/5$. Если максимальная амплитуда бетатронных колебаний составляет x_{\max} , что соответствует расстоянию от центра инфлектора до равновесной орбиты, то расстояние от равновесной орбиты после двух оборотов составит $x = x_{\max} \cos 2\pi/5$. Частицы тогда будут лежать на расстоянии $\Delta x = x_{\max} (1 - \cos 2\pi/5) = 0,69 x_{\max}$ от положения инжекции, так что при условии, что полуширина инфлектора $\omega/2 < 0,69 x_{\max}$, частицы на втором обороте не заденут инфлектора. Через 10 оборотов частицы будут иметь максимальную амплитуду бетатронных колебаний около инфлектора, так что равновесная орбита должна быть смещена на $\omega/2$ в течение этих 10 оборотов.

В описанной выше процедуре, где частица, прежде чем вернуться к положению равновесия, совершает достаточное число оборотов, величину поперечного конфигурационного пространства, равную ширине инфлектора, уже нельзя использовать для дальнейшей инжекции частиц.

Однако при диаметре пучка, заполнившем апертуру инфлектора, некоторые частицы неизбежно будут потеряны в конце первого

оборота, если равновесная орбита не сдвинута на ширину инфлектора. Знание точной фазы бетатронных колебаний позволяет нам использовать то свойство, что бетатронная и орбитальная частоты не являются целыми кратными числами, что вместе с предположением о конечной длине инфлектора дает нам возможность инжектировать несколько оборотов на каждую половину ширины инфлектора. Из приведенного выше анализа видно, какие большие преимущества мы будем иметь, если уменьшим эмиттанс фазового пространства до очень малых значений при определенном токе инжекции.

Многооборотная инжекция, использующая радиационное затухание. В предыдущих пунктах мы приложили абстрактную теорию накопления частиц в фазовом пространстве к конкретной физической задаче о предотвращении столкновения колеблющейся частицы с инфлектором. Аналогично уменьшение площади фазового пространства в результате применения негамильтоновых сил может быть объяснено на примере радиационных сил как радиационное затухание амплитуды колебаний. Удобно объяснить этот процесс на примере накопительных колец со встречными пучками [22].

В этом эксперименте короткий импульс тока с энергией от 300 до 500 Мэв инжектируется из линейного ускорителя в накопительное кольцо. Магнит инфлектора отключается до того, как траектории первоначально инжектируемых частиц снова возмущаются его магнитным полем. Амплитуда колебаний, которая привела бы частицы обратно в возмущающее поле, затем затухает из-за синхротронного излучения. В силу значительного интервала времени от начала инжекции амплитуда колебаний достаточно затухает, так что частицы уходят из окрестности возмущающего движения поля инфлектора при инжекции последующих оборотов. Окончательный размер пучка зависит от противоборствующих эффектов радиационного затухания и раскачки из-за рассеяния на остаточном газе, тормозного излучения и квантовых флуктуаций. Рассеяние на остаточном газе ведет к бетатронным колебаниям, тормозное излучение и квантовые флуктуации излучения усиливают синхротронные колебания.

На рис. 4.19 дан эскиз инфлектора накопительных колец в Стэнфорде. Частота радиальных бетатронных колебаний выбрана приблизительно $\nu_x = 3/4$, так что частица, совершающая бетатронные колебания, достигнет своей максимальной амплитуды в заданном положении по азимуту один раз за четыре периода колебаний. Инфлектор изгибает орбиту параллельно равновесной орбите, но на расстоянии в 5 см от нее, так что возбуждаются бетатронные колебания с этой амплитудой. Поле инфлектора, выбрано таким, что оно изгибает орбиту только в том случае, если она смещена в направлении инфлектора от равновесной орбиты на максимальную амплитуду колебаний. Затем за промежуток времени, меньший четырех периодов колебаний, он выключается, так что колебания с амплитудой в 5 см затем затухают. Поле инфлектора формирует-

ся в ферритовом магните, который ограничивает величину краевого поля, к тому же позволяет осуществлять быстрое включение и выключение магнита.

Чтобы определить равновесный размер пучка, нужно сравнить степень радиационного затухания со степенью раскачки. Затухание рассчитывается с использованием (4.115) при $n = 0,5$, $E_1 = P_v T = 5 \text{ кэВ/оборот}$ с $T = 1/f_0$ и $f_0 = 36 \text{ МГц}$, тогда находим $\tau_r \cong \tau_v \cong 3 \text{ мсек}$ и $\tau_s \cong 1,5 \text{ мсек}$, так что колебания будут затухать. Найдено, что наиболее существенный эффект раскачки — радиационные флуктуации. Кристи [3] рассчитал этот эффект, мы здесь,

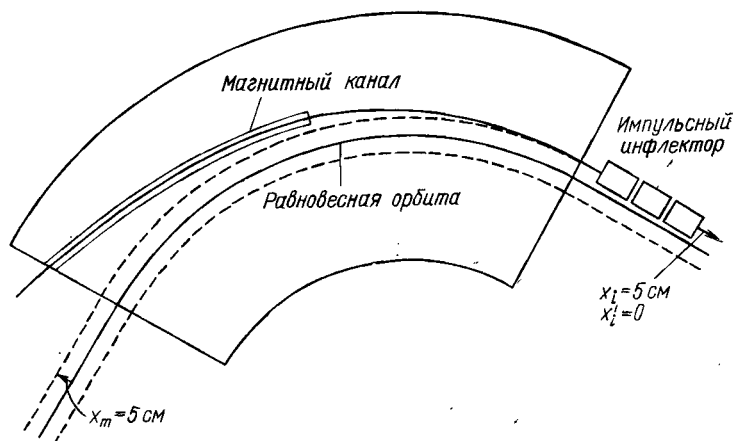


Рис. 4.19. Рисунок инфлектора для многооборотной инжекции в накопительное кольцо в Стэнфорде.

не повторяя выкладок, приведем равновесный радиус, который при гауссовском распределении частиц составил $\delta r = 0,13 \text{ см}$. Существует также равновесная плотность, которая может быть найдена приравниванием скорости инжекции к скорости потерь. Потери частиц, расположенных на хвостах гауссовского распределения, обычно незначительны, и, как найдено, основными источниками потерь являются: а) одночастичное упругое рассеяние на остаточном газе, в результате чего вектор импульса изменяется в достаточной степени для того, чтобы частицы ударились о стенки; б) одночастичное тормозное излучение из-за взаимодействия с остаточным газом, которое изменяет энергию так, что выводит частицы из устойчивой области фазового пространства синхротрона. При давлении 10^{-8} тор время жизни этих событий около 10 мин для упругого рассеяния и 3 ч для тормозного излучения. Большое различие между временными константами затухания и раскачки позволяет инжектировать достаточное число оборотов, так что предельная плотность ограничена скорее имеющейся в нашем распоряжении мощностью ускорителя, чтобы компенсировать излучение, и коллективными

эффектами, чем имеющимся у нас свободным фазовым пространством. На практике стэнфордская группа достигла накопленных токов порядка 100 *ма*. Наиболее серьезное ограничение возникает в силу коллективного эффекта [8], который мы не будем здесь рассматривать.

Накопление пучка в ускорителях с постоянным магнитным полем и переменными градиентами. Хотя мы не касались специально ускорителей с постоянным магнитным полем и переменными градиентами, один аспект их работы, а именно многооборотная инжекция, тесно связан с идеями фазового пространства. Ускоритель с постоянным магнитным полем ускоряет в одно и то же время частицы всех энергий, заключенных между энергией инжекции и конечной энергией и расположенных на различных радиусах. Небольшой коэффициент расширения орбиты означает малость всего сдвига по радиусу в течение процесса ускорения, что позволяет ускорять много заряженных сгустков с различными энергиями в вакуумной камере скромных размеров. Симон и Сесслер [30] изучили ряд новых механизмов многооборотного ускорения, основанных на характерных особенностях машин с постоянным магнитным полем и переменными градиентами.

Ускорение и накопление частиц. Симон и Сесслер назвали синхронную площадь акцептанса областью устойчивости, а процесс ускорения — ускорением области устойчивости. Это особенно подходит для ускорителей этого типа, так как возможно одновременно ускорять много областей устойчивости, используя генераторы, настроенные на различные гармоники (или различные подгармоники одной частоты). Области устойчивости адиабатически перемещаются к более высоким энергиям медленным изменением частоты высокочастотного поля, а затем накапливаются в области рабочей энергии. Накопление на одной рабочей энергии несложно, используя генераторы с соответственно запрограммированными частотами, но требовало бы специальных магнитных полей, если бы использовались гармоники одного осциллятора.

Ограничением этого способа накопления частиц является свободное фазовое пространство внутри данного радиального разброса пучка при пиковой энергии. Если, например, мы инжектируем частицы при энергии E_1 , соответствующей частоте обращения $d\theta/dt = \omega_1$, полное допустимое продольное фазовое пространство для некоторого ΔE_1

$$A_1 = 2\pi \Delta E_1 / \omega_1. \quad (4.164)$$

Если мы хотим накопить n оборотов при энергии E_2 , соответствующей орбитальной частоте ω_2 , допустимое фазовое пространство тогда A_2 , и если все n оборотов могут быть, по крайней мере теоретически, захвачены, тогда $A_2 = nA_1$, давая требуемый разброс по энергиям:

$$\Delta E_2 = (\omega_2/2\pi) A_2 = n (\omega_2/\omega_1) \Delta E_1. \quad (4.165)$$

Разброс по энергиям связан с коэффициентом расширения орбиты, определенным в (4.83), как

$$\Delta r_2 = \alpha r_2 (\Delta p_2/p_2) \simeq \alpha r_2 (\Delta E_2/E_2) = \alpha r_0 n (\omega_2/\omega_1) (\Delta E_1/E_2), \quad (4.166)$$

где приближенное равенство выполняется для релятивистских частиц. Это дает верхний предел числа оборотов n , которые можно накопить с заданным энергетическим разбросом и заданным интервалом Δr_2 . Однако на практике очень трудно заполнить эту площадь:

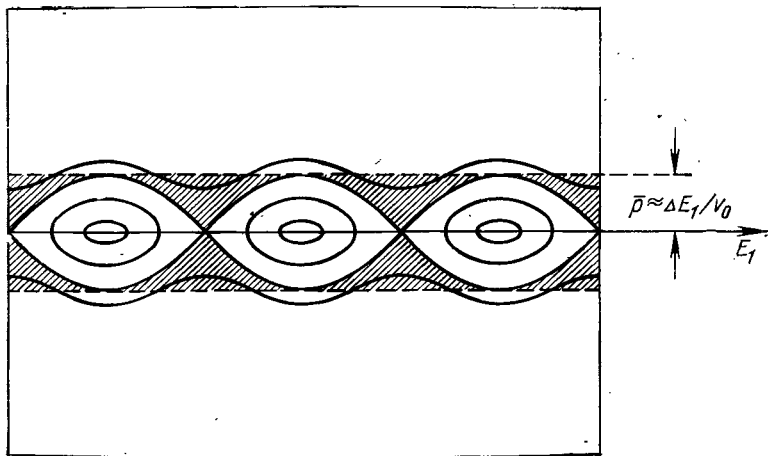


Рис. 4.20. Диаграмма накопления пучка в синхротроне с постоянным магнитным полем и переменными градиентами.

Если в рассмотренном выше примере мы осуществляем инжекцию на гармонике, скажем, $h = 3$, то фазовая диаграмма для одного полного оборота при нулевом ускорении будет иметь вид, показанный на рис. 4.20. Частицы внутри заштрихованной области находятся внутри ΔE_1 , но не на устойчивых орбитах и поэтому, если E_1 медленно изменяется, они при обычных условиях не будут захвачены. Таким образом, не вся фазовая область A_1 входит в нормальный акселеранс машины. Затем она еще больше уменьшается в соответствии с рис. 3.14.

Рассмотрим подробно ускорение от энергии E_1 до энергии E_2 . Для простоты примем, что начальная энергия достаточно велика, так что она превышает критическую энергию [энергия, при которой $\eta = 0$, так как первый и второй члены в (4.866) уничтожаются], тогда $\eta \simeq \alpha$. Переход через критическую энергию всегда неадиабатический и поэтому не может изучаться с использованием техники фазового пространства. Однако приближенные вычисления можно провести, определение же поведения области устойчивости можно облегчить использованием фазовых диаграмм [12]. Здесь

мы для определения действительного изменения эмиттанса рассмотрим адиабатический процесс, используя (4.90) и (4.91) и $\bar{p}\bar{s} = \text{const}$, вместе с соотношениями между группами канонических переменных. Аналогично выводу отклонения ΔE в линейных ускорителях см. (4.153)] получаем

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \left(\frac{v_2 E_2}{v_1 E_1} \right)^{3/4} \left(\frac{r_1 \omega_2 V_2 \cos \varphi_2}{r_2 \omega_1 V_1 \cos \varphi_1} \right)^{1/4}. \quad (4.167)$$

Для ультрарелятивистского случая $v_0 = \omega r_0 = c$, полагая v и $\cos \varphi_0$ постоянными, получаем приблизительное соотношение

$$\Delta E_2 / \Delta E_1 = (E_2 / E_1)^{3/4} (r_1 / r_2)^{1/2}. \quad (4.168)$$

Смещение фазового пространства. Интересным следствием сохранения фазового пространства является механизм фазового смещения для ускорения частиц. По мере того как области устойчивости смещают частицы к более высоким энергиям, фазовое пространство при больших энергиях должно быть смещено вниз, чтобы освободить место для фазового пространства, занятого областями устойчивости. Аналогично замедление областей устойчивости при высокой энергии приводит к смещению вверх фазового пространства вне областей устойчивостей и, если частицы занимают это фазовое пространство, они также будут ускорены. Можно использовать ту же область устойчивости, чтобы сначала адиабатически ускорить частицы с областями устойчивости, неадиабатически «подавить» колебания частиц при более высокой энергии и затем сместить частицы в фазовом пространстве к более высокой энергии в процессе адиабатического торможения областей устойчивости до более низких энергий.

§ 5.1. Основные положения

Адиабатические инварианты движения. Представление о некоторых свойствах движения плазмы в электрическом и магнитном полях можно получить, рассмотрев движение отдельных частиц. Решение уравнений движения облегчается существованием интегралов движения. Если частоты осцилляций по каждой степени свободы сильно различаются, то для систем с несколькими степенями свободы существуют адиабатические интегралы движения даже в том случае, когда точные интегралы движения не существуют. В гл. 2 мы видели, что интегралы движения можно разложить в асимптотический ряд и, если отношение двух частот осцилляций (обозначим его ϵ) приближается к нулю, существуют величины, которые приближаются к интегралам движения быстрее любой степени ϵ . Мы показали, что интеграл действия, связанный отдельной степенью свободы, является таким адиабатическим интегралом.

Рассмотрим движение частицы в сильном магнитном поле, пространственные вариации которого малы на протяжении циклотронного радиуса

$$\rho \frac{\|\mathbf{v} B\|}{B} \ll 1, \quad (5.1a)$$

а временные вариации малы на протяжении циклотронного периода

$$\frac{\tau}{B} \cdot \frac{dB}{dt} \ll 1, \quad (5.1b)$$

где $\rho = w/\omega_c$ и $\tau = 2\pi/\omega_c$ — соответственно циклотронный радиус и циклотронный период: $w \approx v_{\perp}$ (v_{\perp} — компонента скорости, перпендикулярная к магнитному полю). В этой области можно рассматривать приблизительно три степени свободы: вращение вокруг силовой линии, колебание вдоль нее, дрейф поперек силовой линии. Если взять такие степени свободы, то можно разложить движение по этим степеням и, следовательно, привести движение к квадратурам. Возьмем радиус-вектор частицы в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \left[\mathbf{R}_n(t) \cos \frac{n\theta(t)}{\epsilon} + \mathbf{S}_n(t) \sin \frac{n\theta(t)}{\epsilon} \right] \equiv \mathbf{R}(t) + \mathbf{p}(t), \quad (5.2)$$

где ε — малый параметр; $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{R}_n(t)$, $\mathbf{S}_n(t)$ и $\theta(t)$ — медленно меняющиеся функции t . Если $\varepsilon = 1/T$, то (5.2) будет эквивалентной формой асимптотического разложения гармонического колебания. Действительно, в работе [3] показано, что (5.2) — асимптотическое разложение для точной траектории частицы, заданной условиями (5.1.) В выражении (5.2) $\theta(t)/\varepsilon$, а следовательно, и $\rho(t)$ быстро изменяются и описывают вращение вокруг ведущего центра, тогда как $\mathbf{R}(t)$ задает медленное движение вокруг ведущего центра. Продифференцировав (5.2) по времени, получим скорость

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}. \quad (5.3)$$

Здесь мы разложили \mathbf{v} на скорость ведущего центра \mathbf{u} и скорость вращения \mathbf{w} . Предположим теперь, что

$$\mathbf{v}_\perp \approx \mathbf{w}, \quad \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{u}_\parallel, \quad (5.4)$$

т. е. поперечная дрейфовая скорость мала по сравнению со скоростью вращения. Тогда для обобщенного линейного импульса, перпендикулярного к магнитному полю, имеем

$$\mathbf{p}_\perp = m\mathbf{w} + e\mathbf{A}. \quad (5.5)$$

Предположение (5.4) согласуется с тем, что в нулевом приближении орбиты вращения замкнуты и интеграл действия

$$\oint \mathbf{p}_\perp \cdot d\mathbf{l} = \text{const}, \quad (5.6)$$

последнее справедливо для медленно меняющихся параметров. Подставляя (5.5) в (5.6), имеем

$$\oint m\mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} + \oint e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \text{const}. \quad (5.7)$$

Каждый интеграл в левой части (5.7) можно преобразовать к функциям, пропорциональным потоку, пронизывающему орбиту. Преобразуем первый интеграл, заметив, что

$$m\mathbf{w} = [e\mathbf{r} \times \mathbf{B}], \quad (5.8)$$

и, проинтегрировав (5.8) по орбите при $\mathbf{r} \perp \mathbf{B}$, получим

$$\oint m\mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = -2\pi r^2 B, \quad (5.9)$$

где B согласно (5.1) считаем однородным по всей орбите. Аналогично для второго интеграла имеем

$$e \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi r^2 B.$$

Здесь первое равенство вытекает из теоремы Стокса, второе — из определения векторного потенциала, а последнее — из предположения об однородности B . Таким образом, первый интеграл в (5.7) отличается от второго множителем 2 и знаком, поэтому окончательно (5.7) приводится к выражению

$$-\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \text{const}. \quad (5.10)$$

Последнее означает, что полный поток, пронизывающий орбиту, является интегралом движения. Интеграл (5.10) равен половине интеграла (5.9), следовательно,

$$\pi m \omega r = m \omega^2 / 2 \omega_c = C = \text{const}$$

или

$$\mu = (1/2) e \omega_c r^2 = e \omega^2 / 2 \omega_c = (e/m) C, \quad (5.11)$$

где μ — магнитный момент тока. Если $e/m = \text{const}$ (нерелятивистские изменения энергии), то магнитный момент сохраняется. Адиабатическое пространство μ впервые показал Альвен при исследовании движения заряженной частицы в магнитном поле Земли [1].

После того как найден интеграл движения, соответствующий одной степени свободы, можно отделить это движение от других. Предполагая, что u_{\perp} мало, запишем полную энергию частицы в виде

$$E = m \omega^2 / 2 + m u_{\parallel}^2 / 2,$$

где для простоты рассматриваем только статические магнитные поля, не включая электрического поля. Решая это уравнение относительно u_{\parallel} , получаем

$$u_{\parallel} = \left[\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 \right) \right]^{1/2}$$

или, используя выражение для магнитного момента,

$$u_{\parallel} = \left[\frac{2}{m} (E - \mu B) \right]^{1/2}. \quad (5.12)$$

Далее, если B изменяется так, что в какой-то точке траектории $E = \mu B$, то $u_{\parallel} = 0$ и частица начинает двигаться в обратном направлении. Такое отражающее действие магнитного поля определяется только видом функции $B(s)$, поскольку $\mu = \text{const}$ при этом движении. Таким образом, мы действительно разделили продольное и циклотронное движение. Тотчас же получаем продольный инвариант

$$J_{\parallel} = \oint p_{\parallel} ds = \text{const} \quad (5.13)$$

или, подставляя $p_{\parallel} = m u_{\parallel} + e A_{\parallel}$ и учитывая, что $\oint A_{\parallel} ds = 0$, поскольку поток не замкнут, имеем ($m = \text{const}$)

$$J_{\parallel}^* = \oint u_{\parallel} ds = \text{const}. \quad (5.14)$$

Результат (5.14) представляет собой обычную формулировку теоремы о продольной инвариантности. Отметим, что J_{\parallel}^* определен как интеграл по замкнутой орбите в фазовом пространстве и что он должен быть адиабатическим интегралом, согласно изложенной выше теории. Предполагается, что продольное движение «плотное». Это означает, во-первых, что прежде чем фаза продольных колебаний сколь-нибудь изменится, циклотронное движение пройдет через все фазы (это эквивалентно нашему предположению, что $\mu = \text{const}$).

и, во-вторых, что поперечный дрейф мал на одном периоде продольного движения. Можно показать, что последнее требование эквивалентно адиабатическому предположению, потому что члены, описывающие дрейф, можно включить в (5.7) как функции третьей степени свободы, но они считались постоянными в течение продольного периода. Еще один метод получения соотношения (5.10) [10, 11] заключается в прямом определении переменных угол — действие:

$$J(E, s, t) = \int_0^s [2m(E - \mu B)]^{1/2} ds';$$

$$\theta(E, s, t) = \int_0^s \frac{ds'}{[2m(E - \mu B)]^{1/2}},$$

так что можно найти dJ/dt и показать, что усредненное за период продольных колебаний значение $\langle dJ/dt \rangle$ равно нулю. Следует также отметить, что E не обязательно должна быть точной константой, а может меняться медленно по сравнению с периодом продольных колебаний. Существование продольного инварианта, безусловно, предполагалось в механизме ускорения космических лучей, предложенном Ферми [22]. То же самое было показано Теллером и Нортропом [44] в связи с проблемой удержания заряженных частиц.

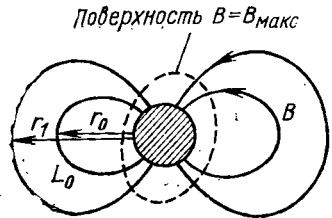


Рис. 5.1. Поле диполя.

Если имеется медленный дрейф от одной силовой линии к другой вследствие наличия градиента магнитного поля, то, считая замкнутой орбиту в фазовом пространстве соответствующей степени свободы, можно предполагать, что существует третий адиабатический инвариант, связанный с площадью этого фазового пространства. Покажем, следуя [44], периодичность движения для специального случая. Рассмотрим поле слабо асимметричного диполя (рис. 5.1). Частица осциллирует вдоль силовой линии со скоростью, определяемой уравнением (5.12), в пределах, ограничиваемых некоторым $B = B_{\text{макс}} = E/\mu$. Далее, если при дрейфе вокруг диполя частица оказывается на другой силовой линии, скажем на L_1 вместо L_0 , то, поскольку $B(r_1) < B(r_0)$, из (5.12) следует, что $u_{\parallel}(r_1) > u_{\parallel}(r_0)$. Так как длина линий также увеличивается от L_0 до L_1 , то, как видно из (5.14), J_{\parallel} также должно увеличиваться при движении от L_0 до L_1 для частиц, имеющих одинаковую точку возврата. Однако, поскольку J_{\parallel} — адиабатический интеграл относительно этого дрейфа, заключаем, что дрейфовое движение периодично.

Для периодического дрейфового движения можно построить интеграл действия для степени свободы, отвечающей дрейфу, в ко-

тором предполагаются усредненными как вращательное движение, так и продольное:

$$J_{\perp} = \oint m u_{\perp} \cdot dl + \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \text{const}, \quad (5.15a)$$

где полагаем $J_{\perp} = \text{const}$ при отсутствии каких-либо изменений параметров, определяющих движение. Пусть теперь энергия системы медленно изменяется со временем, например, вследствие медленного изменения \mathbf{B} со временем, тогда выражение (5.15a) останется адиабатически справедливым в силу адиабатического постоянства интеграла действия для любой независимой степени свободы.

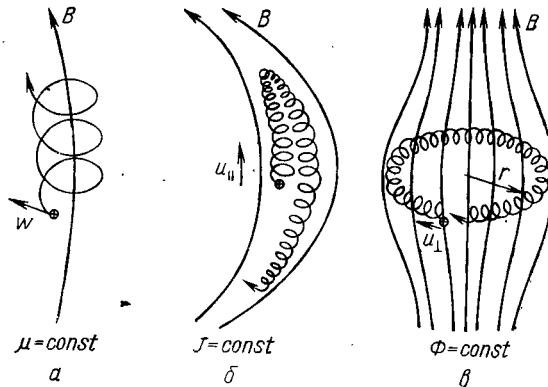


Рис. 5.2. Периодическое движение заряженной частицы в магнитном поле: вращение вокруг силовых линий со скоростью w и циклотронным периодом τ_c (а); осцилляции вдоль силовых линий между магнитными зеркалами со скоростью u_{\parallel} и периодом τ_l (б); дрейф поперек силовых линий вокруг конфигурации как целого со скоростью u_{\perp} и периодом τ_D (в).

Второй член в выражении для J_{\perp} значительно больше первого, так как их отношение (предполагая, что B и u_{\perp} — постоянные)

$$\frac{\pi e B R^2}{2\pi u_{\perp} R} = \frac{\pi \omega_c m u_{\perp} R / \omega_D}{2\pi m u_{\perp} R} = \frac{\omega_c}{2\omega_D} \gg 1.$$

Знак \gg следует из (5.1), т. е. циклотронная частота значительно больше дрейфовой частоты ω_D . Таким образом, мы установили инвариантность потока для адиабатических систем:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \text{const}, \quad (5.15б)$$

где S — поверхность, натянутая на дрейфовую орбиту. Другой подход к доказательству того, что поток, пронизывающий дрейфо-

вую орбиту, является интегралом движения, можно найти в работе [42]. Движения, связанные с тремя адиабатическими инвариантами, показаны схематически на рис. 5.2 [38].

Движение ведущего центра. В этом разделе получим уравнения движения ведущего центра $\mathbf{R}(t)$, для которого быстрое вращение вокруг силовой линии усреднено. Адиабатические инварианты, отвечающие продольным осцилляциям и поперечному дрейфу (которые фактически связаны с ведущим центром), установлены независимо от концепции ведущего центра. Хотя в (5.4) предположено что $\mathbf{w} \gg \mathbf{u}$, т. е. что скорость вращения значительно больше скорости дрейфа, тем не менее можно исследовать дрейфовое движение, независимо от быстрых временных вариаций скорости вращения. Это возможно, так как вращательное движение влияет на дрейф только через адиабатический интеграл μ . Метод разделения быстрого и медленного движений по существу является тем же, что и метод усреднения, рассмотренный в § 1.4. Там мы видели, что при исследовании движения, обусловленного малым дополнительным возмущением, осцилляторный член может быть усреднен. Метод, применяемый в этом случае, более сложен. Подробно он исследован Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским [7] и несколько отличным способом Крускалом [30]. Кратко приведем основные положения, следуя Ленерту [38]. Более подробное изложение читатель встретит в выше названных работах, а также в работе [42].

Если предположить, что радиус вращения $\rho(t)$ мал по сравнению с расстояниями, на которых поля изменяются заметным образом, то можно разложить поля в окрестности ведущего центра в ряд Тейлора:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{q} \cdot \nabla)^n \mathbf{B}_R; \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{q} \cdot \nabla)^n \mathcal{E}_R. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Для первого члена в разложениях уравнение движения заряженной частицы после подстановки $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ имеет вид

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{u}}{dt} - e\mathcal{E}_R - e\mathbf{u} \times \mathbf{B}_R - e\mathbf{w} \times (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{B}_R = \\ = -m \frac{d\mathbf{w}}{dt} + e(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathcal{E}_R + e\mathbf{w} \times \mathbf{B}_R + e\mathbf{u} \times (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{B}_R. \end{aligned}$$

Члены справа осциллируют с частотой вращения и при усреднении обращаются в нуль. Таким образом, усредняя по периоду вращения, получаем

$$m (d\mathbf{u}/dt) - e\mathcal{E}_R - e\mathbf{u} \times \mathbf{B}_R - \langle \mathbf{w} \times (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{B}_R \rangle = 0, \quad (5.17)$$

где последний член слева имеет отличное от нуля значение, так как \mathbf{w} и $\boldsymbol{\rho}$ осциллируют с частотой вращения. Поскольку \mathbf{w} и $\boldsymbol{\rho}$ перпендикулярны к \mathbf{B}_R и $\mathbf{w} = \boldsymbol{\rho}/\omega_c$, можно записать среднее значение следующим образом:

$$\langle \mathbf{w} \times (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{B}_R \rangle = -\nabla B_R \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega_c} \omega^2 \cos^2 \omega_c t d(\omega_c t),$$

где $\omega = \|\mathbf{w}\|$, $\boldsymbol{\rho} = \|\mathbf{q}\|$, $B_R = \|\mathbf{B}_R\|$.

После интегрирования имеем

$$\langle \mathbf{w} \times (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{B}_R \rangle = -\frac{e\omega^2}{2\omega_c} \nabla B_R = -\mu \nabla B_R.$$

Уравнение для ведущего центра

$$m(du/dt) = e(\mathcal{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_R) - \mu \nabla B_R, \quad (5.18)$$

как мы видим, зависит от вращательного движения только через адиабатически постоянный магнитный момент. Сделаем, однако, важное замечание: если электрическое поле \mathbf{E} очень большое, то, не вступая в противоречие с соотношениями (5.1) (соответствующим образом измененными в целях включения медленно меняющихся электрических полей), получаем, что компоненты постоянного дрейфа также могут быть большими, а последнее нарушает предположение, что $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}_\perp$. В этом случае орбиты вращения не являются почти замкнутыми, а следовательно, нельзя непосредственно применять адиабатическую теорию. Однако, выбирая новую систему отсчета, которая сама движется со скоростью $\mathbf{u} = \mathcal{E} \times \mathbf{B}_R / B_R^2$, мы тем самым выполним необходимое условие, чтобы орбиты были почти замкнутыми.

Уравнение (5.18) описывает полное движение ведущего центра. Однако для облегчения вычислений и для ясного представления физической сущности различных членов его удобно разложить на компоненты. Движение вдоль магнитного поля можно получить, умножая (5.18) на единичный вектор $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/B$, имеющий направление поля (индекс R опущен):

$$m\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathcal{E} - \mu(\hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla) B. \quad (5.19)$$

Аналогично движение дрейфа, перпендикулярное к полю, получаем, умножая векторно $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ и \mathbf{B}/B :

$$\mathbf{u}_\perp = (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{B} = \left(\mathcal{E} - \frac{\mu}{e} \nabla B - \frac{m}{e} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{B}. \quad (5.20)$$

Разлагая \mathbf{u} на параллельную и перпендикулярную составляющие, можно выразить (5.20) как

$$\mathbf{u}_\perp = \left[\mathcal{E} - \frac{\mu}{e} \left(1 + \frac{2u_\parallel^2}{\omega^2} \right) \nabla B - \frac{m}{e} \cdot \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} + \frac{2\mu u_\parallel}{e\omega^2} (\nabla \times \mathbf{B}) \right] \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{B}. \quad (5.21)$$

Первый член в скобках описывает электрическое поле или дрейф, обусловленный внешними силами; второй член представляет собой дрейф за счет ∇B , причем второе слагаемое в круглых скобках возникает из-за продольного движения; третий член описывает поперечный инерциальный дрейф; четвертый член — поляризационный дрейф, который появляется тогда, когда имеются изменяющиеся со временем электрические поля или токи плазмы, так как $\text{rot } \mathbf{V} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}$. Для одночастичного движения при отсутствии внешних электрических сил первый и четвертый члены равны нулю, а третий член имеет второй порядок малости. Таким образом, окончательно выражение (5.21) приобретает вид

$$\mathbf{u}_{\perp} = -\frac{\mu}{e} \left(1 + \frac{u_{\parallel}^2}{\omega^2} \right) \nabla B \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{B}. \quad (5.22)$$

Уравнение (5.22) представляет собой уравнение дрейфа, которое мы используем далее для анализа движения в несимметричных полях.

Эквивалентность вращательного движения гармоническому осциллятору. Мы видели, что в нулевом приближении вращательное движение эквивалентно осциллятору с одной степенью свободы. Действительно, если магнитное поле однородно в пространстве, то вращательное движение эквивалентно гармоническому осциллятору, и магнитный момент является адиабатическим интегралом во всех порядках асимптотического разложения. Но если силовые линии искривлены, то, исключая нулевое приближение, собственно адиабатический инвариант отличается от магнитного момента. Мы обсудим это ниже, а в § 5.2 вычислим разность в первом приближении для дипольного поля. Следуя работе [11], покажем эквивалентность вращательного движения гармоническому осциллятору в случае, когда магнитное поле меняется со временем, но однородно в пространстве:

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} B(t), \quad (5.23)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор в z -направлении. В уравнение движения

$$d^2 \mathbf{r} / dt^2 = e (\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.24)$$

подставим значение \mathcal{E} из уравнений Максвелла для случая, когда пространственный заряд отсутствует:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \mathbf{z} \times \mathbf{r} \frac{dB}{dt},$$

Получим

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mathbf{z} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \omega(t) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (5.25)$$

где $\omega(t)$ — обычная циклотронная частота $\omega = eB/m$. Вращение в плоскости xy описывается двумя уравнениями, которые [из (5.25)] имеют вид:

$$\ddot{x} - \omega(t) \dot{y} - (1/2) \dot{\omega}(t) y = 0; \quad (5.26)$$

$$\ddot{y} + \omega(t) \dot{x} + (1/2) \dot{\omega}(t) x = 0. \quad (5.27)$$

Комбинируем (5.26) и (5.27) так, чтобы можно было ввести комплексную переменную $\xi = x + iy$ (как и в § 3.3). В результате получим

$$\ddot{\xi} + i\omega \dot{\xi} + (1/2) i \dot{\omega} \xi = 0. \quad (5.28)$$

Как и в предыдущем случае с постоянной ω , уравнение (5.28) описывает два движения: колебание модуля $\|\mathbf{r}\|$ и вращение \mathbf{r} с частотой, равной половине циклотронной частоты. Можно свести движение к чисто колебательному введением новой переменной в системе отсчета, вращающейся с ларморовской частотой $\omega_L = \omega/2$

$$\xi = z \exp \left[- (1/2) i \int \omega dt \right]. \quad (5.29)$$

Подставляя переменную (5.29) и ее первую и вторую производные в (5.28), получаем

$$\ddot{z} + \omega_L^2 z = 0. \quad (5.30)$$

Уравнение (5.30) в точности совпадает с уравнением гармонического осциллятора, для которого уже разработана асимптотическая теория адиабатического изменения параметров в § 1.4 (для первого порядка) и в § 2.1 (для всех порядков). Теперь, используя теорию для первого порядка, покажем, что адиабатическое изменение параметра ω_L предполагает постоянство магнитного момента (например, см. [11]). Однако, поскольку решения корректны лишь асимптотически и, как мы видели, ряд обычно расходится при включении нескольких членов, рассмотрим только решения первого порядка. По этой причине Чандрасекар также подверг критике разложение для n порядков.

Ранее уже было найдено [см. (1.45)], что в первом приближении

$$z = A \omega_L^{-1/2} \exp \left(i \int \omega_L dt \right), \quad (5.31)$$

далее, если предположить, что начальные и конечные значения вычислены в области, где $\omega_L = \text{const}$, то

$$\dot{z} = i A \omega_L^{1/2} \exp i \int \omega_L dt.$$

Найдем выражение для $\dot{z} z^*$, где * означает комплексно-сопряженную величину, $\dot{z} z^* = \|A\|^2 \omega_L$. Таким образом, получаем выражение

$$\dot{z} z^* / \omega_L = \text{const}, \quad (5.32)$$

которое фактически повторяет результат для первого порядка (см. § 2.1). Дифференцируя (5.29), находим, что $\xi\xi^* = 2\dot{z}\dot{z}^*$, а это позволяет непосредственно отождествить J с μ , поскольку

$$(1/2)(m v_{\perp}^2/B) \sim \xi \xi^* / (2\omega_L). \quad (5.33)$$

Распространяя более общий результат § 2.1 на этот случай, можно сделать вывод, что асимптотически μ является адиабатическим интегралом во всех порядках.

Инварианты более высоких порядков. Рассмотренные ранее три адиабатических инварианта, которые характеризуют движение частицы в магнитном поле при условии, что это движение может быть приближенно представлено как колебательное по трем степеням свободы, будут членами наинизшего порядка в асимптотических рядах вида

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots = \text{const}; \\ J &= J_0 + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \dots = \text{const}; \\ \Phi &= \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Ранее мы не делали различия между инвариантами нулевого порядка и асимптотическими инвариантами, представленными следующими членами соответствующего ряда в (5.34). Однако при выводе уравнения движения ведущего центра мы видели, что имеются поправки более высоких порядков к уравнению ведущего центра (5.17), пропорционально параметру разложения $\rho \cdot \nabla$ согласно (5.16). Применение этого параметра разложения эквивалентно выполнению условий адиабатичности (5.1). Если учесть члены более высокого порядка из (5.16), то в уравнении ведущего центра (5.18) значение μ уже не будет равно μ_0 , а будет включать эти члены более высокого порядка. Ясно, что мы получим более точное значение адиабатического интеграла при более высоких порядках адиабатических параметров (5.1) и что параметр ε в разложениях (5.34) можно связать с этими параметрами. Для частиц, вращающихся в магнитном поле, можно дать эквивалентную запись разложения в виде степеней отношения массы к заряду m/e , так как $\rho (\nabla B/B) = (m/e)(v/B)\nabla B/B$.

Чтобы получить выражение для инвариантов в виде разложения (5.34), можно использовать метод Крускала [32], описанный в § 2.4. Если канонические уравнения движения, зависящие от $2N$ переменных, соответствующих N степеням свободы, являются периодическими по одной переменной в нулевом порядке некоторого параметра ε , то можно найти преобразование к новой системе координат, в которой уравнения движения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}' &= \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{z}, \varepsilon); \\ \varphi' &= \omega(\mathbf{z}, \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

так что движение не зависит от значения угловой переменной и в нулевом порядке $\varepsilon(2N - 1)$ -компонентный вектор \mathbf{z} постоянен. Все компоненты являются разложениями по ε , и можно показать, что эти уравнения удовлетворяются в отдельности для любой степени ε . Для такой системы Крускал показал, что из канонических переменных можно построить адиабатический инвариант

$$M = \oint \mathbf{p}(\mathbf{z}, \varphi, \varepsilon) \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{z}, \varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} d\varphi, \quad (5.36)$$

который адиабатически постоянен в отдельности в каждом порядке по ε . Для частицы, вращающейся в магнитном поле, $M_0 = \mu_0$. Если в предположении $\mu = \text{const}$ существует вторая периодичность в наимизшем порядке по ε , то второй инвариант может быть обобщен на любой порядок по ε следующим образом. Произведем каноническое преобразование от \mathbf{p}, \mathbf{q} к новой системе координат $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \mu, \varphi$ с новым гамильтонианом $\bar{H}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \mu, \varepsilon)$, который будет циклическим по φ , так как $\dot{\mu} = \partial \bar{H} / \partial \varphi = 0$. Преобразование к новому набору переменных $\bar{\mathbf{z}}, \bar{\varphi}$ даст второй адиабатический инвариант

$$J = \oint \bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\varphi}) \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}} d\bar{\varphi} = \text{const}, \quad (5.37)$$

который также постоянен (независимо) в любом порядке по ε . Дополнительные канонические преобразования приведут к дополнительным адиабатическим инвариантам при условии, что движение является периодическим в наимизшем порядке по ε . Для частицы, вращающейся в магнитном поле, можно найти три таких инварианта, что соответствует трем степеням свободы, для которых в нулевом порядке по ε уже найден каждый инвариант. Вычисление инвариантов в первом порядке по ε может быть необходимым при определении дрейфовых поверхностей, как уже показано в § 2.4. Аналитический расчет в первом приближении для вращающейся частицы довольно сложен. Крускал [31] и Нортроп [43], а также Гарднер [24] вычислили μ в первом приближении. Нортроп, Ли и Крускал [43] вычислили также в первом приближении продольный инвариант J . Приведем значения μ и J в первом порядке, полученные Зимбисом и Нортропом [55]. Для магнитного момента имеем

$$\begin{aligned} \mu_0 + \varepsilon \mu_1 = \frac{v_{\perp}^2}{2B} \left[1 + \varepsilon v_{\parallel} \left(\frac{3}{2} \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{M}} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{N}} \right) : \nabla \hat{\mathbf{B}} \right] - \\ - \frac{\varepsilon v_{\parallel}^2 v_{\perp}}{B^2} (\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{B}} : \nabla \hat{\mathbf{B}}), \end{aligned} \quad (5.38)$$

где $\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{M}}$ и $\hat{\mathbf{N}}$ — ортогональный набор единичных векторов, причем вектор $\hat{\mathbf{M}}$ исходит из центра кривизны линии поля; символ «:» оз-

начает диадное произведение. Выражение для продольного инварианта:

$$J_0 + \varepsilon J_1 = \oint \left[\frac{2}{m} (E - (\mu_0 + \varepsilon \mu_1) B) \right]^{1/2} ds + \int_0^s u_{\perp} \frac{\nabla J_0}{u_{\parallel}} ds, \quad (5.39)$$

где дрейф u_{\perp} берется из (5.22). Все величины вычисляются на радиусе R ведущего центра.

Некоторые общие замечания о неадиабатическом поведении. Иногда адиабатическая инвариантность нарушается или кажется нарушенной.

1. Орбиты, вычисленные с использованием адиабатических инвариантов, могут не соответствовать действительным орбитам. Это может быть обусловлено не отсутствием инварианта, а тем, что использован инвариант слишком низкого порядка по параметру разложения (см. § 2.4), что также создает значительные трудности при определении дрейфовой поверхности.

2. Резкое или резонансное изменение параметров обычно изменяет адиабатический инвариант, связанный с этими параметрами. В § 3.2 вычислено изменение интеграла действия при резком изменении параметра в случае одномерного осциллятора, а здесь мы проделаем аналогичное вычисление для частицы, вращающейся в магнитном поле. Изменение μ при резонансном изменении параметра исследовано в § 5.4 и 5.5 при рассмотрении вопросов, связанных с нагревом частиц и с инжекцией частиц в стационарное магнитное поле зеркального типа. В случае, когда частица периодически пересекает область неадиабатичности или область резонанса, может существовать дополнительный адиабатический инвариант, при этом первоначальный адиабатический инвариант сам может быть осциллятором в некотором масштабе времени. Такая ситуация имеет место при периодической фокусировке в ускорителях (см. § 4.1); в § 5.4 мы убедимся в том, что аналогичное явление имеет место и в случае высокочастотного нагрева в поле магнитного зеркала.

3. Численные расчеты показывают, что для мультипериодных систем, если параметр в гамильтониане начинает существенно изменяться в течение периода колебаний, существует переходная область, в которой адиабатический инвариант системы перестает существовать. Для асимметричного поля, которое рассмотрено в § 5.3, большой дрейф приведет к разрушению второго адиабатического инварианта. Нарушение условий адиабатичности (5.1) приводит сначала к тому, что J перестает быть интегралом, а по мере дальнейшего нарушения условий (5.1) — к тому, что и магнитный момент μ тоже перестает быть постоянным. Для аксиально-симметричных полей условия (5.1) более жестки и при их нарушении μ быстрее перестает быть инвариантом. Мы уже наблюдали это в § 2.4 при численном расчете движения частиц в потенциальной яме до-

вольно простого вида; в § 5.3 будут приведены аналогичные численные результаты для удержания заряженных частиц.

При рассмотрении различных типов неадиабатичности трудно сделать количественные утверждения, которые были бы справедливы всегда. Для простого неадиабатического перехода вычисление можно выполнить так, как это сделано в § 3.2, и так, как мы сделаем ниже. В некоторых случаях существование адиабатических интегралов для мультипериодных систем можно доказать на основе топологических соображений [41]. Для общего случая мультипериодных систем можно сделать только количественные расчеты, как это сделано выше. Некоторые из приведенных ниже причин исчезновения интегралов движения можно понять на основе резонансных или стохастических явлений. Мы увидим в § 5.4, что введение стохастической связи по фазе между двумя неадиабатическими изменениями параметров может преобразовать упорядоченное осцилляторное движение в случайное. С точки зрения понятий фазового пространства (см. § 3.1) случайность в фазе при скачкообразных изменениях параметров приводит к тому, что частицы распределяются по всем фазам колебания и ограничиваемая ими площадь фазового пространства увеличивается при каждом скачке. Упорядоченные же (не случайные) скачки параметров не обязательно приводят к увеличению фазовой площади или интегралов действия. Другая причина, которая может привести к нарушению адиабатической инвариантности, — резонанс. Мы уже имели дело с резонансом при рассмотрении движения частиц в ускорителях; в § 5.4 будет рассмотрено влияние резонансов в связи с высокочастотным нагревом частиц. Для собственных колебаний системы в линейном приближении нормальные моды не могут быть резонансными. Однако введение нелинейностей может приводить к резонансному взаимодействию между модами колебаний. Это явление хорошо известно в ускорителях (см. [15]) и применено Б. В. Чириковым [12] для количественного объяснения нарушения адиабатической инвариантности в удерживаемой плазме. Б. В. Чириков объяснил это нарушение нелинейным резонансом между вращением и продольным колебанием. Однако его результат не объясняет резкого возникновения неадиабатического состояния.

Неадиабатическое изменение поля. Если магнитное поле быстро изменяется за время, сравнимое с ларморовским периодом, то магнитный момент не будет интегралом движения. В § 3.2 уже рассмотрено воздействие резкого изменения параметров на интеграл действия в случае одномерного осциллятора. Здесь же ситуация несколько отличается тем, что, по сути дела, имеется пара связанных осцилляторов, движение которой может быть проанализировано как движение одиночного осциллятора во вращающейся системе отсчета [см. уравнения (5.25) и (5.30)]. При скачкообразном изменении величины поля изменяются как частота колебания, так и частота вращения системы отсчета. Таким образом, неадиабатическая задача — это задача с двумя степенями свободы. Однако мы увидим, что

в частном случае симметричной системы, в которой канонический угловой момент равен нулю, при скачке средние изменения действия у обеих систем одинаковы.

Рассмотрим сначала магнитное поле, величина которого в некоторый момент изменяется скачком. Пусть этот скачок происходит в момент времени $t = 0$. Уравнение (5.28) можно проинтегрировать в каждом временном интервале постоянства магнитного поля. Получаем

$$\dot{\xi} + i\omega_1 \xi = c_1, \quad (t = 0-); \quad (5.40a)$$

$$\dot{\xi} + i\omega \xi - (1/2) i (\omega - \omega_1) \xi = c_2 \quad (t = 0+), \quad (5.40b)$$

где переменная ξ не изменяется мгновенно при изменении циклотронной частоты от ω_1 при $t = 0-$ до ω при $t = 0+$. Уравнение (5.40a) имеет решение

$$\xi = \alpha + \rho \exp [i (\omega_1 t - \chi)], \quad (5.41)$$

где ρ , очевидно, — радиус вращения, а α — комплексная постоянная, зависящая от выбора начала координат системы отсчета и начальных условий в магнитном поле. Дифференцируя (5.41) и подставляя в (5.40a), найдем постоянную интегрирования

$$i\omega_1 \alpha = c_1.$$

Затем вычислим значение ξ после скачка. Из уравнения (5.40b) после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \xi(0+) \xi^*(0+) = & \frac{\rho^2 (\omega + \omega_1)^2}{4} + \left[1 + \frac{\|\alpha\|^2 (\omega - \omega_1)^2}{\rho^2 (\omega + \omega_1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\|\alpha\|}{\rho} \cdot \frac{\omega - \omega_1}{\omega + \omega_1} \cos \psi \right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

где ψ — угол между χ и Φ для $\alpha = \|\alpha\| e^{i\Phi}$. Дифференцируя (5.41), получаем для $t = 0-$

$$\dot{\xi}(0-) \xi^*(0-) = \rho^2 \omega_1^2. \quad (5.43)$$

Магнитные моменты до и после скачка определяются формулой (5.33) после соответствующей подстановки в нее соотношений (5.43) и (5.42). Чтобы получить среднее изменение магнитного момента для всех фаз в момент скачка, усредним (5.42) по ψ и возьмем отношение усредненного значения (5.42) к (5.43)

$$\left\langle \frac{\mu}{\mu_1} \right\rangle = \frac{(\omega + \omega_1)^2}{4\omega\omega_1} \left(1 + \frac{\|\alpha\|^2}{\rho^2} \cdot \frac{(\omega - \omega_1)^2}{(\omega + \omega_1)^2} \right). \quad (5.44)$$

Этот результат получили Хертвек и Шлютер [29]. Рассмотрим частный случай инжекции с нулевым угловым моментом внутрь аксиально-симметричной системы. Мы видели в § 3.3, что $\|\alpha\| = \rho$. В этом случае вращение совершенно эквивалентно одномерному осциллятору (см. § 3.2), а формула (5.44) дает такое же значение

для среднего изменения в действии при скачке, какое мы получаем, усредняя член в скобках в формуле (3.35) по фазам колебаний $\omega_1 t_0$ в точке скачка. Действительно, замечая, что $R/R_1 = \omega/\omega_1$ при постоянной массе, и усредняя выражение (3.35), получаем

$$\left\langle \frac{J}{J_1} \right\rangle = \frac{\omega^2 + \omega_1^2}{2\omega_1 \omega}. \quad (5.45)$$

Это идентично значению $\langle \mu/\mu_1 \rangle$, которое можно получить из формулы (5.44), положив в ней $\|\alpha\| = \rho$.

Для медленных изменений магнитного поля величина $\langle \mu/\mu_1 \rangle$ была вычислена Хертвеком и Шлютером [29] и несколько отличным способом Чандрасекаром и Треханом [11]. Этот метод аналогичен методу, изложенному в § 2.2 для гармонического осциллятора, а результат аналогичен усредненному выражению (2.46). Для $\|\alpha\| = 0$ и изменения ω по закону

$$\omega(t) = (\omega_1/2) [3 + \text{tg}(t/T)],$$

согласно которому ω изменяется от постоянного значения ω_1 при $t = -\infty$ до $2\omega_1$ при $t = +\infty$, Хертвек и Шлютер аналитически вычислили $\langle \mu/\mu_1 \rangle$ для случаев быстрого и медленного изменений ω и сравнили результаты с численными расчетами (рис. 5.3). Эти результаты показывают, как мы уже видели в § 4.4, что адиабатическое приближение является хорошим, даже если параметры существенно изменяются за период колебания. Однако выбор $\|\alpha\| = 0$ соответствует специальной фазе или частице, вращающейся симметрично относительно магнитной оси.

Хотя на определение среднего изменения μ/μ_1 затрачено много времени, трудно найти точное физическое приложение этому результату. При однократном прохождении частицы через неадиабатическую область в каждой фазе циклотронного колебания происходят различные изменения в μ (исключая особый случай движения, охватывающего ось симметрии), так что после скачка значения μ будут иметь некоторый разброс, соответствующий заполнению эффективной площади фазового пространства. Если отдельная частица многократно пересекает неадиабатическую область, то картина становится значительно более сложной (см. § 3.3 и 3.4).

Динамика плазмы Власова. В § 1.1 рассмотрены преимущества фазового представления динамики частиц. Мы нашли, что: а) фазовые траектории не пересекаются и, следовательно, описание движения частиц становится максимально простым; б) как следствие предыдущего, существует четкая граница области в фазовом пространстве, внутри которой происходит движение всех частиц; в) для систем, подчиняющихся гамильтоновым уравнениям, фазовое пространство ведет себя подобно несжимаемой жидкости; г) существуют часто дополнительные интегралы движения, которые позволяют сделать разделение степеней свободы, что еще более упрощает анализ; д) кроме того (см. § 1.3), движение системы n взаимодействующих частиц можно рассматривать в некотором приближении

не в би-мерном фазовом пространстве, а в 6-мерном фазовом пространстве, в котором действующие на частицы силы представлены сглаженными самосогласованными полями.

Если силы, обусловленные пространственным зарядом, или другие силы взаимодействия между частицами отсутствуют, то использование свойств фазового рассматривания «а» совместно с «д» позволяет получить аналитические решения, дающие по крайней мере приблизительное описание движения.

В случае, когда в рассмотрении включены силы, действующие между частицами, получить аналитические решения не удастся, за исключением некоторых частных случаев. Большинство задач как ускорительных, так и плазменных решаются только численным методом, причем расчеты можно сильно упростить, используя свойства «а», «в», «д». Во многих задачах, имеющих ту или иную симметрию, может быть использовано свойство «г», позволяющее перейти к описанию в двумерном фазовом пространстве и, таким образом, существенно упростить вычисления. Такие вычисления были проделаны Дори [18] для исследования явления неустойчивости типа отрицательной массы в ускорителях, а также Робертсом и Берком [49] для исследования нелинейного развития двухлучковой неустойчивости.

Теперь приведем наиболее важные результаты Робертса и Берка, полученные на основе численного расчета. Как и в большинстве примеров, исследованных в гл. 3 и 4, они рассматривали простое распределение плотности в фазовом пространстве, постоянное внутри некоторой ограниченной области и равное нулю вне ее. При анализе движения используются свойства «б» и «в», т. е. определяется движение только граничных частиц и вычисляется плотность зарядов интегрированием постоянного фазового распределения по скоростям. Движение предполагается нерелятивистским, так что при отсутствии внешних магнитных полей уравнения движения для граничных частиц сводятся к

$$dx/dt = v \text{ и } dv/dt = -\partial U/\partial x,$$

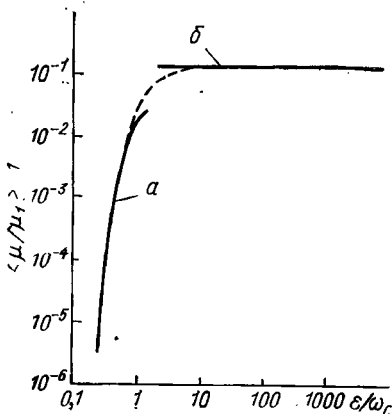


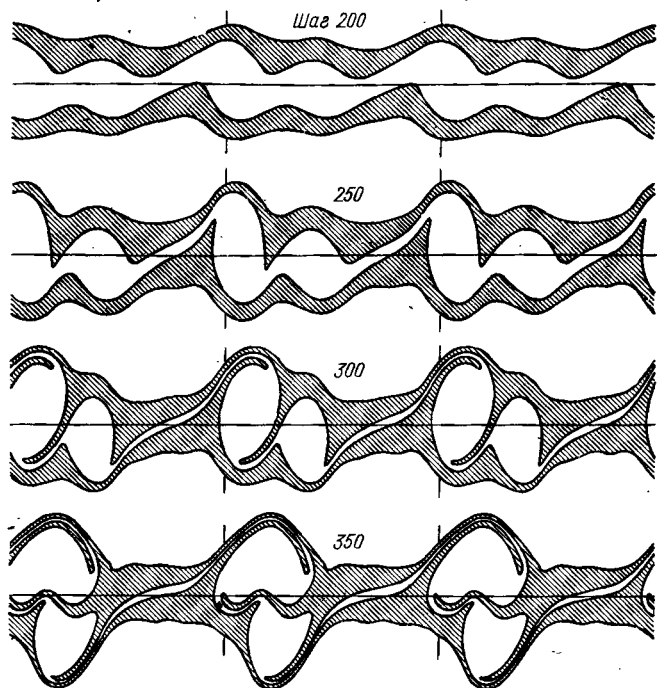
Рис. 5.3. Зависимость величины $\langle \mu/\mu_1 \rangle - 1$, характеризующей отклонение от адиабатической инвариантности, от относительной скорости изменения магнитного поля ε/ω_c . Кривые *a* и *b* — соответственно асимптотические решения для медленных и быстрых изменений. Пунктирная линия получена с помощью численного интегрирования точного уравнения движения.

где потенциал U определяется из уравнения Пуассона. При вычислении основное затруднение возникает из-за нитевидности границы, обусловленной нелинейностью сил. С этим мы уже сталкивались, рассматривая движение в негармонической потенциальной яме. При численном расчете это приводит либо к уменьшению точности при следовании по границе с фиксированным числом граничных точек, либо к росту времени счета, когда число граничных точек увеличивается в процессе вычислений. Первый метод применил Дори, а второй — Робертс и Берк. Если нитевидные части фазового распределения содержат малый заряд, то этими частями можно пренебречь (см. § 3.3 и 3.4). В случае же численных расчетов в процессе вычислений можно упростить границы. Это позволило получить результаты, вычисленные с большим числом периодов колебаний.

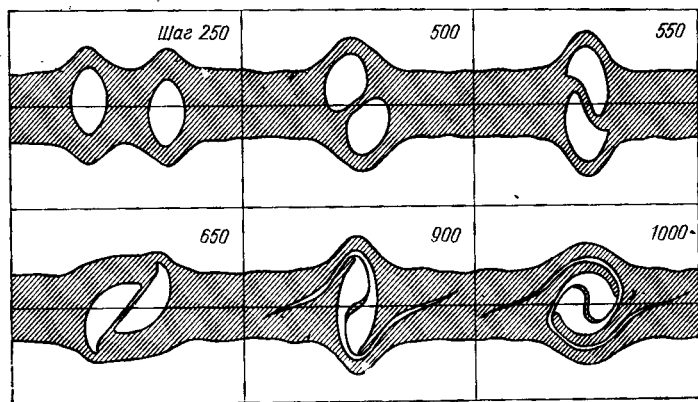
На рис. 5.4, а показан процесс развития двухпучковой неустойчивости, вычисленный Робертсом и Берком. Плазма (зачерненная область) выше горизонтальной линии перемещается вправо, а ниже горизонтальной линии — влево. По осям абсцисс и ординат отложены соответственно координаты и скорости. Периодические граничные условия наложены в точках $x = 0, L$ с волновыми числами $k = 2\pi n/L$, где $n = 1, 2$; скорость нормирована так, что на участках линейного роста скорости равны $\gamma/\omega_p \simeq 0,3$ для обеих гармоник, где $\omega_p = e^2 n/m\epsilon_0$ — собственная частота колебаний плазмы. Шаг по времени равен $1/20$ периода колебаний плазмы. Эволюция показана через интервалы в 50 шагов, начиная с 200-го шага в уже нелинейной области. Самое интересное свойство нелинейного поведения неустойчивости в фазовом пространстве — это перемешивание двух потоков, сопровождающееся образованием «дырок» с нулевой плотностью внутри. Дырочная структура довольно устойчива во времени, образуя собой электростатическую волну большой амплитуды. Дырки притягиваются друг к другу, взаимодействуя как гравитационные тела. Механизм образования дырки, посредством которого стабилизируется двухпучковая неустойчивость, очевиден лишь тогда, когда движение описывается в фазовом пространстве.

Можно также исследовать динамику взаимодействия дырок, используя ту же вычислительную методику. Робертс и Берк предположили, что вначале две дырки погружены в плазму с прямоугольным распределением скоростей, причем дырки смещены в пространстве скоростей так, что если разделение центров дырок (средняя относительная скорость дырки) равно Δv , то $\Delta v/v_1 = 0,2$, где v_1 — ширина распределения скоростей. Дырки сделаны довольно большими, так что нормированный потенциал в центре дырки задается выражением $2U/m v_1^2 = 0,5$.

Следовательно, можно ожидать, что дырки будут сильно взаимодействовать. Эволюция фазовой жидкости изображена на рис. 5.4, б, начиная с 250-го шага интегрирования до 1000-го шага, где длина шага задана выражением $\Delta t\omega_p \simeq 0,04$.



a



б

Рис. 5.4. Взаимодействия в фазовом пространстве плазмы Власова:

a — нелинейная двухпучковая неустойчивость; *б* — дырочное взаимодействие.

Выпуклости в распределении скорости плазмы вблизи дырок действуют как экранирующее облако, так что в начальной стадии на дырку не влияет пространственный заряд другой дырки и поэтому они не взаимодействуют. Когда две дырки совпадают в пространстве, они образуют большой положительный пространственный заряд, который втягивает электроны в область, разрушая прежде устойчивое распределение заряда. Дырки сливаются с отдельными струйками и фазовая жидкость перемещивается. Если бы средние относительные скорости дырок были выше при том же потенциале дырки, то дырки могли бы проходить друг через друга неповрежденными, испытывая при этом некоторое *приливное* искажение. Для облегчения вычислений было выбрано постоянное распределение фазовой плотности. В принципе можно использовать более плавные распределения, при этом нужно последовательно проследить движение границ совокупности вложенных друг в друга областей постоянной плотности. Взаимодействия, которые мы рассмотрели, приводят в итоге (вследствие нитевидности) к сглаженной функции распределения.

Статистические свойства бесстолкновительной фазовой жидкости исследовал Ланден-Белл [40], который нашел, что жидкость подчиняется новой статистике. Мы считали, что в случае, когда плотность элементов жидкости (для малых интервалов) равна двум значениям $f = 0$ и $f = 1$ равновесное грубое распределение (большие интервалы) становится распределением Ферми

$$F(E) = \frac{f_0}{1 + \exp[(E - E_F)/Y]},$$

где E_F и Y определяются из полной энергии и фазовой площади, а $E = U + mv^2/2$. Однако следует ожидать, что такое распределение стремится после достаточного времени взаимодействия к полностью нитевидной фазовой жидкости.

§ 5.2. Удержание частицы в поле диполя

Введение. Рассмотрим теперь движение частицы в поле диполя, которое аппроксимирует магнитное поле Земли. Границы орбитальной устойчивости являются границами областей, в которых могут находиться захваченные частицы. Эта задача является типичным примером использования адиабатических инвариантов в задачах удержания частиц. Если в биполярных координатах степени свободы разделяются, то адиабатический инвариант первого порядка может быть найден аналитически и его можно сравнить с инвариантом нулевого порядка или магнитным моментом. Движение частицы в поле диполя впервые рассмотрел Штермер [61]. Эта задача, часто называемая проблемой Штермера, в большой степени стимулировала развитие адиабатической теории [1, 44]. Обширный обзор приведен в работе Штермера [62]. Магнитное поле диполя

характеризуется большой кривизной силовых линий и поэтому можно ожидать, что теория адиабатической инвариантности, в первом порядке которой кривизной пренебрегли, дает в этом же порядке некорректные результаты. Однако адиабатический инвариант можно образовать в системе координат, в которой степени свободы совпадают с криволинейными координатами, соответствующими силовым линиям. Такой выбор системы координат основан на интуитивном предположении, что периодическое движение приблизительно разделяется на быстрое вращение вокруг силовой линии и более медленное колебание вдоль силовой линии.

Постановка задачи. На рис. 5.5 изображена система отсчета, которая связана с дипольным моментом M , показывающим спиральное вращение частицы вокруг силовой линии. Используем угол широты λ (а не угол долготы θ), как обычно в задаче диполя. Диполь может быть описан либо векторным потенциалом

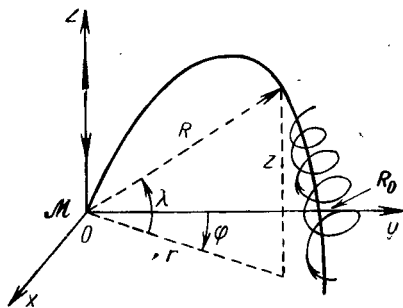


Рис. 5.5. Схематическое представление движения захваченной заряженной частицы в поле магнитного диполя. Положительное направление оси z выбрано в связи с тем, что магнитный момент Земли направлен вниз [19].

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{u}}_{\varphi} \frac{M \cos \lambda}{4\pi R^2} = \hat{\mathbf{u}}_{\varphi} \frac{Mr}{4\pi (r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (5.46)$$

либо эквивалентным скалярным потенциалом

$$\frac{M \sin \lambda}{4\pi R^2} = \frac{Mz}{4\pi (r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.47)$$

так, что

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla V. \quad (5.48)$$

Можно показать, что релятивистский гамильтониан для системы магнитных полей, не зависящих от времени [26], имеет вид

$$\bar{H} = \left[c^2 \sum_i \frac{(p_i - eh_i A_i)^2}{h_i^2} + m_0^2 c^4 \right]^{1/2} = E, \quad (5.49)$$

где векторный потенциал A_i — функция координат q_i , а канонические импульсы p_i задаются выражением

$$p_i = \gamma m_0 h_i^2 \dot{q}_i + eh_i A_i.$$

Здесь h_i — коэффициенты Ламе, такие, что $dl_i = h_i dq_i$; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор; $E = \gamma m_0 c^2$ — постоянная

энергия. В цилиндрических координатах коэффициенты Ламе равны $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_z = 1$. Для биполярной симметрии имеем

$$\bar{H} = [c^2 p_z^2 + c^2 p_r^2 + c^2 (p_\varphi/r - eA_\varphi)^2 + m_0^2 c^4]^{1/2}, \quad (5.50)$$

где

$$p_z = \gamma m_0 \dot{z}; \quad p_r = \gamma m_0 \dot{r}; \quad p_\varphi = \gamma m_0 r^2 \dot{\varphi} + erA_\varphi.$$

Так как энергия постоянна, используем эквивалентный нерелятивистский гамильтониан

$$H = \frac{1}{2\gamma m_0} \left[p_z^2 + p_r^2 + \left(\frac{p_\varphi}{r} - eA_\varphi \right)^2 \right] = \text{const}, \quad (5.51)$$

который имеет более простую форму, но те же частные производные по всем динамическим переменным и, следовательно, является эквивалентным описанием движения. Поскольку, как видно из (5.46), A_φ — функция только r и z , то φ — циклическая координата, и условие $\dot{p}_\varphi = -\partial H/\partial \varphi = 0$ дает интеграл движения

$$p_\varphi = eM\Gamma/4\pi, \quad (5.52)$$

где Γ определяется из начальных условий. Таким образом, задача сводится к определению движения в $r-z$ -плоскости, описываемого гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\gamma m_0} [p_z^2 + p_r^2] + U(r, z) = \text{const}, \quad (5.53)$$

где после подстановки A_φ из (5.46)

$$U(r, z) = \frac{eM}{8\pi\gamma m_0} \left[\frac{\Gamma}{r} - \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]^2. \quad (5.54)$$

После того как определили $r(t)$ и $z(t)$, $\varphi(t)$ можно найти, интегрируя последнее из уравнений (5.50). Эта задача полностью эквивалентна уже рассмотренной задаче с центральной силой. Здесь $U(r, z)$ имеет минимум и представляет собой потенциальную яму, в которой могут осциллировать захваченные частицы. Эквивалентность будет более очевидной, если рассматривать движение только в экваториальной плоскости $z = 0$. В этом случае (5.54) принимает вид

$$U(r) = \frac{eM}{8\pi\gamma m_0} \left[\frac{\Gamma}{r} - \frac{1}{r^2} \right]^2,$$

который с точностью до знака идентичен эквивалентному потенциалу в задаче с центральной силой.

Для двумерной задачи удобно ввести безразмерные переменные $\bar{z} = \Gamma z$; $\bar{r} = \Gamma r$; $\bar{t} = (\Gamma^3 eM/4\pi\gamma m_0)t$. Опуская для упрощения записи черточки, получаем:

$$H = (p_z^2 + p_r^2)/2 + U(r, z) = 1/(32\gamma_1^4); \quad (5.55)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} - \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]^2, \quad (5.56)$$

где $\gamma_1^4 = \frac{1}{16} \left(\frac{eM}{4\pi\sigma\gamma m_0} \right)^2 \Gamma^4$ — безразмерная константа, введенная Штермером [62]. Видим, что в этой системе единиц в плоскости $z = 0$ потенциал U имеет экстремум, определяемый из уравнения

$$\frac{dU}{dr} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) = 0.$$

Потенциал имеет минимум $U = 0$ при $r = 1$ и максимум $U = 1/32$ при $r = 2$. Таким образом, захваченные частицы осциллируют в потенциальной яме, значение минимума которой нормировано на единицу.

Метод интегралов действия. Рассмотрим теперь движение в системе отсчета, в которой периодическое движение естественным образом распадается на вращение вокруг силовой линии и колебание вдоль нее. Ортогональная система координат строится из линий постоянного потенциала V и силовых линий $B = -\nabla V$. Из (5.47) имеем $M \sin \lambda / (4\pi R^2) = \text{const}$, что в нормированной форме имеет вид

$$R^2 = b^{-1} \sin \lambda \quad (5.57a)$$

или в цилиндрических координатах

$$b = z / (r^2 + z^2)^{3/2}. \quad (5.57b)$$

Линии, на которых b постоянно, являются линиями постоянного потенциала. Беря градиент V , получаем

$$\mathbf{B} = \frac{M}{4\pi} \left(-\hat{\mathbf{u}}_r \frac{2}{R^3} \cos \lambda + \hat{\mathbf{u}}_\lambda \frac{1}{R^3} \sin \lambda \right).$$

Уравнение для линии B найдем из дифференциального уравнения $dR/Rd\lambda = B_r/B_\lambda = -2 \operatorname{ctg} \lambda$, которое после интегрирования дает

$$R = a \cos^2 \lambda, \quad (5.58a)$$

или в цилиндрических координатах

$$a = (r^2 + z^2)^{3/2} / r^2. \quad (5.58b)$$

Линии $a = \text{const}$ — силовые линии и, следовательно, a и b представляют собой новый набор ортогональных координат. В нашей нормированной системе единиц на линии $a = 1$ потенциал U принимает минимальное значение. Линейный элемент в биполярной системе координат задается выражением

$$ds = \hat{\mathbf{u}}_a h_a da + \hat{\mathbf{u}}_b h_b db.$$

Коэффициенты Ламе h_i вычисляются из соотношения $h_i = \partial s / \partial q_i = \|\partial \mathbf{R} / \partial q_i\|$, где \mathbf{R} — радиус-вектор. Для биполярной системы координат получаем:

$$\left. \begin{aligned} h_a(a, b) &= \cos^3 \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{-1/2}; \\ h_b(a, b) &= a^3 \cos^6 \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Для простоты коэффициенты Ламе представлены как функции λ , а λ выражается через a и b с помощью уравнений (5.57) и (5.58): $\sin \lambda / \cos^4 \lambda = a^2 / b$. Новый и старый гамильтонианы могут быть связаны посредством производящей функции типа F_2 (см. § 1.2)

$$H(a, b, p_a, p_b) = H(r, z, p_r, p_z) + F_2(r, z, p_a, p_b),$$

так что, если мы выберем F_2 в виде

$$F_2 = a(r, z) p_a + b(r, z) p_b, \quad (5.60)$$

то a и b непосредственно определяются из (5.60)

$$a = \partial F_2 / \partial p_a; \quad b = \partial F_2 / \partial p_b, \quad (5.61)$$

а p_a и p_b из

$$\left. \begin{aligned} p_z &= \partial F_2 / \partial z = (\partial a / \partial z) p_a + (\partial b / \partial z) p_b; \\ p_r &= \partial F_2 / \partial r = (\partial a / \partial r) p_a + (\partial b / \partial r) p_b, \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

откуда находим, что

$$p_r^2 + p_z^2 = (p_a / h_a)^2 + (p_b / h_b)^2.$$

Это очевидно с физической точки зрения, поскольку $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{s}$ не должно зависеть от системы координат. Итак, гамильтониан приводится к виду

$$H(a, b, p_a, p_b) = (1/2) [(p_a / h_a)^2 + (p_b / h_b)^2] + U(a, b) = 1 / (32\gamma_1^4). \quad (5.63)$$

Используя выражение (5.58) и (5.54), получаем потенциал в виде

$$U(a, b) = (a - 1)^2 / (a^4 \cos^6 \lambda). \quad (5.64)$$

Отметим, что при $a = 1$ потенциал равен нулю, т. е. на линии $a = 1$ энергия минимальна. Напишем интеграл действия для движения, перпендикулярного к силовой линии, оставляя b постоянным,

$$J_a(b, p_b) = \oint p_a da = \oint 2h_a \left[H - U - \frac{1}{2} \cdot \frac{p_b^2}{h_b^2} \right]^{1/2} da = \text{const.} \quad (5.65)$$

Если b и p_b приблизительно постоянны в течение цикла, то линейный интеграл соответствует фактическому движению частицы в течение цикла, т. е. является адиабатическим интегралом движения. Тем самым мы выбрали систему отсчета, в которой две степени свободы разделяются в адиабатическом приближении. Из (5.65), в частности, следует, что $p_b^2 = f(b)$, т. е. импульс p_b — функция только b , так что в средней плоскости ($b = 0$)

$$\|p_b\| = \alpha = \text{const.}$$

Этот результат используем при сравнении постоянства магнитного момента с постоянством действия J_a . Чтобы связать магнитный момент μ с J_a , выразим J_a в явном виде. Мы не можем непосредственно оценить интеграл (5.65), поэтому разложим подынтегральное выражение в окрестности точки равновесия в ряд по степеням $a - a_0 = \rho$,

так что ρ — радиус вращения вокруг силовой линии $a = a_0$, где a_0 несколько отличается от 1, т. е. от значения a при минимальном потенциале. Драгт [19] провел такие вычисления и, удерживая в разложении члены второго порядка, получил

$$J_a = \pi v_{\perp}^2 / \omega - (\pi / \omega) (v_{\parallel}^2 / R) h_a (a - 1) + o(1/\gamma_1^4), \quad (5.66)$$

где $J_a = o(1/\gamma_1^2)$; $1/\gamma_1$ предполагается малым; R — радиус кривизны линий. Подставляя магнитный момент $\mu = v_{\perp}^2 / 2\omega$, можно выразить μ через J_a :

$$\mu = J_a / 2\pi + (1/2\omega) (v_{\parallel}^2 / R) h_a (a - 1). \quad (5.67)$$

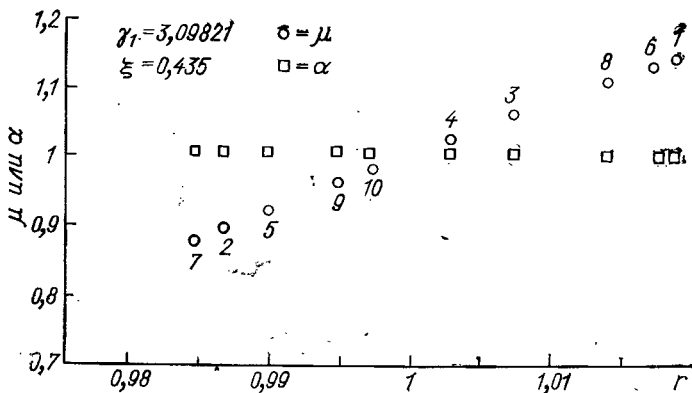


Рис. 5.6. Значения μ и α как функции r на последовательных экваториальных сечениях. Орбита характеризуется постоянной Штермера γ_1 и значением ξ , когда $r = 1$. Для удобства значения μ и α нормированы на единицу в точке $r = 1$.

Отличие μ от J возрастает с увеличением энергии (увеличением v_{\perp}^2 и отклонением a от 1) и увеличением кривизны силовых линий (уменьшением R).

Далее, если рассмотреть последовательные сечения экваториальной плоскости, то на каждом сечении a будет иметь разные значения и поэтому величина μ также будет меняться. Драгт численно построил значения α и μ как функции r , на последовательных сечениях средней плоскости ($r = a$), которые мы воспроизвели на рис. 5.6. Видим, что α по существу постоянно, в то время как μ сильно меняется с изменением r . Расчет проведен при некоторых частных значениях γ_1 и $\xi = \cos^2 \lambda = v_{\perp}^2 / v^2$. Используя полученные численные значения α , было найдено, что вариация μ , рассчитанная по формуле (5.67), находится в хорошем соответствии с численными результатами. Аналогичные вычисления показывают, что вариация μ с изменением r увеличивается при уменьшении γ_1 и $\cos^2 \lambda$, как и предсказано теорией.

Исследование последовательности сечений средней плоскости показывает, что имеется ряд значений r (или a), указывающих различные фазы вращения. Все же можно ожидать, что при усреднении μ будет оставаться приближенно постоянным. Физически это означает, что вследствие кривизны линии мгновенный магнитный момент должен быть различным на обеих сторонах линий, однако в предположении, что все фазы колебания выбраны равными, средний магнитный момент при $a = 1$ должен быть равен $\mu = J_a$. Величина J_a уже проинтегрирована по периоду вращения и поэтому является средней. Другой путь исследования проблемы состоит в привлечении нашего доказательства адиабатической инвариантности, основанного на теореме Лиувилля. Если считать две степени свободы независимыми, то фазовая площадь, ограниченная замкнутыми фазовыми траекториями, определяется интегралом $\oint p_a da$, где считается, что a пробегает все фазы при фиксированном времени. Ограниченная фазовая площадь сохраняется. В случае медленного изменения параметров мы ожидаем, что точки, лежащие на замкнутой орбите, остаются на ней и, следовательно, замкнутые траектории преобразуются опять в замкнутые в каждом сечении $b = \text{const}$ (например, в экваториальной плоскости). Эти замкнутые в фазовом пространстве траектории описывают поверхность сечения Пуанкаре, которые довольно полно исследованы топологическими методами [4, 16]. Замкнутые орбиты, описывающие поверхности сечения, могут быть найдены аналитически для экваториальной плоскости в предположении, что гамильтониан H и $p_0^2(z=0)$ постоянны. Подставляя (5.64) и (5.65) в (5.63) при $z = 0$ ($\lambda = 0$), получаем

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{p_a}{h_a} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{h_b} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-1)^2}{a^4} = \frac{1}{32\gamma_1^4}.$$

Подставляя h_b из (5.59) с учетом того, что $(p_a/h_a)^2 = p_r^2$ и $a = r$ при $z = 0$, имеем

$$p_r^2 + \alpha^2/r^6 + (r-1)^2/r^4 = 1/16\gamma_1^4. \quad (5.68)$$

Используя тот факт, что $\alpha^2 = 1 - v_1^2/v^2$ при $r = 1$, Драгт получил результаты, показанные на рис. 5.7 для значений параметров, которые использовались в предыдущих вычислениях (см. рис. 5.6). Близкое расположение точек, полученных аналитически и численно, указывает на близость p_r^2 к адиабатическому интегралу. Приблизительная симметрия относительно оси $r = 0$ показывает, что среднее значение μ , как и ожидали, примерно постоянно. Смещение равновесной точки от минимума потенциала при $r = 1$ обусловлено действием центробежных сил, возникающих вследствие кривизны линии.

Обобщенные координаты и равновесное состояние. Теперь обобщим биполярные координаты так, чтобы система отсчета была применима к произвольным конфигурациям поля. Биполярная коор-

дината b дает линии постоянного скалярного потенциала, а также определяет положение вдоль силовой линии, которое мы обозначим через s . Координата a постоянна вдоль силовой линии и поэтому определяет положение, перпендикулярное к силовой линии, в направлении изменения напряженности поля. Соответствующую обобщенную координату обозначим α . Третья координата для поля диполя — азимутальный угол φ , который вследствие симметрии не влияет на уравнения движения. Обобщением последней координаты на случай произвольного поля будет координата β , перпендикулярная к силовой линии в направлении постоянства поля. Определим масштаб длин для такого выбора координат, полагая векторный потенциал равным

$$\mathbf{A} = \alpha \nabla \beta; \quad (5.69)$$

тогда магнитное поле задается выражением $\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$. Магнитный поток через поверхность определяется соотношением $\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint \alpha d\beta$ или в виде двойного интеграла

$$\Phi = \iint d\alpha d\beta, \quad (5.70)$$

т. е. $d\alpha d\beta$ — элемент площади, перпендикулярный к направлению потока, а коэффициенты таковы, что площадь пересекает единицу потока. Для симметричного диполя имеем

$$s = b; \quad \alpha = a; \quad \beta = \varphi. \quad (5.71)$$

На удобство системы координат α, β, s впервые указал Град*. Нортроп и Теллер [44] использовали эту систему координат для описания движения в случае асимметричного диполя. Однако они не использовали обобщенные канонические переменные, но оставили уравнение ведущего центра основанным на инвариантности μ , а не J_a ; μ же отличается от J_a [эта разница вычислена в (5.67)]. Систему координат α, β можно использовать наряду с каноническими переменными при вычислении μ в следующем, более высоком порядке (как в § 5.1). Систему координат α, β широко используют для вычисления адиабатических инвариантов низких порядков (см., например, [42]) и в особенности для тороидальных систем [28].

Применяя обобщенную систему координат, можно вычислить очень полезную величину — среднюю по продольному периоду

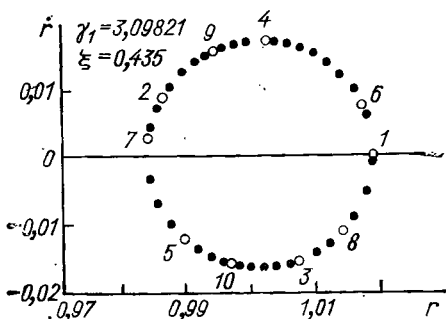


Рис. 5.7. Совпадение аналитических (●) и численных (○) расчетов поверхности раздела.

* См работу [3].

скорость дрейфа. Основываясь на несколько отличном от описанного здесь методе вычисления адиабатических инвариантов, Нортроп и Теллер получили для системы с гамильтонианом $H(\alpha, \beta, \mu, J)$, не зависящим от времени, что

$$\langle v_D \rangle = [\langle \dot{\alpha} \rangle \nabla \beta - \langle \dot{\beta} \rangle \nabla \alpha] \times \mathbf{B}, \quad (5.72)$$

где $\langle \dot{\alpha} \rangle$ и $\langle \dot{\beta} \rangle$ получены из канонических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \langle \dot{\alpha} \rangle &= -(m/e) T (\partial H / \partial \beta); \\ \langle \dot{\beta} \rangle &= (m/e) T (\partial H / \partial \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

Здесь T — продольный период, который равен, как это следует из теории Гамильтона, описанной в § 1.1,

$$1/T = \partial H / \partial J. \quad (5.74)$$

После подстановки (5.73) в (5.72) имеем

$$\langle v_D \rangle = -(m/e) T \nabla H \times (\mathbf{B}/B). \quad (5.75)$$

Используя правила дифференцирования неявной функции

$$\partial J / \partial \beta = (\partial J / \partial H) / (\partial H / \partial \beta)$$

и выражение (5.74), запишем (5.75) в виде

$$\langle v_D \rangle = (m/e) \nabla J \times (\mathbf{B}/B). \quad (5.76)$$

Азимутальный дрейф в первом порядке для осесимметричного диполя и общий дрейф для поля без азимутальной симметрии дает (5.75) или (5.76). В этом приближении метод усреднения и последовательного вычисления адиабатических инвариантов позволяет разложить движение, включающее три связанные степени свободы, на три независимых движения с различными временными шкалами для каждой степени свободы.

Адиабатические инварианты и обобщенные координаты также полезны при описании равновесного распределения плотности. Известно, что уравнение Лиувилля удовлетворяется на траектории частицы и поэтому должно быть функцией интегралов движения. Предполагая, что частицы не взаимодействующие, можно получить уравнение Лиувилля для шестимерной функции распределения, которая выражается через интегралы движения. Положим, что эти интегралы — адиабатические инварианты, так что

$$\dot{f}(p, q) = F(\mu, J, H, q_1, q_2, q_3), \quad (5.77)$$

тогда на основании уравнения Лиувилля имеем в стационарном случае ($\partial F / \partial t = 0$)

$$dF/dt = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i (\partial F / \partial q_i) = 0, \quad (5.78)$$

где производные инвариантов по времени автоматически исчезают. Подставляя \dot{q}_i из уравнений Гамильтона, получаем для стационарного состояния

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial J} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0. \quad (5.79)$$

Уравнение (5.79) означает, что функция распределения F постоянна на поверхности постоянных μ , J и H . Так как α и β — квазиканонические координаты [см. (5.73)], можно заменить q_i в (5.78) координатами α и β , тогда

$$\frac{dF}{dt} = \langle \dot{\alpha} \rangle \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \langle \dot{\beta} \rangle \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0, \quad (5.80)$$

и аналогично в (5.79) заменяем $q_1 = \alpha$, $q_2 = \beta$.

Нортроп и Теллер использовали эти соотношения, чтобы показать, что линии постоянного B на инвариантной поверхности являются также линиями постоянной плотности частиц n . Действительно, заметим, что вдоль силовой линии

$$n = n_0 B/v_{\parallel}, \quad (5.81)$$

где n_0 не зависит от положения; n_0 можно вычислить, интегрируя n/B между точками отражения:

$$\int \frac{n}{B} ds = n_0 \int \frac{ds}{v_{\parallel}} = n_0 \frac{T}{2}. \quad (5.82)$$

Если dV — элемент объема в трубке потока, то

$$d\alpha d\beta = B (dV/ds).$$

Используя это соотношение, перепишем (5.82)

$$\int_S n dV = d\alpha d\beta (n_0 T/2). \quad (5.83)$$

Слева в уравнении — полное число частиц в элементе объема с данным магнитным моментом μ и данной энергией H , т. е. $N d\alpha d\beta$. Тогда $n_0 = 2N/T$ и, подставляя этот результат в (5.81), получаем

$$n = (2B/v_{\parallel}) (N/T).$$

Так как $N d\alpha d\beta$ — число частиц внутри элемента объема при постоянной энергии H и $F d\alpha d\beta$ — число частиц при постоянном J , то величины N и F связаны соотношением $N = F (\partial J/\partial H)$. После подстановки значения $\partial J/\partial H$ из (5.74) получаем

$$n = (2B/v_{\parallel}) F. \quad (5.84)$$

Так как F — постоянна на инвариантной поверхности, то n является константой, умноженной на B/v_{\parallel} ; но поскольку v_{\parallel} постоянно при постоянном B , то n — константа на поверхности постоянного B , что и требовалось доказать.

Интересные приложения взаимозависимости между интегралами движения и равновесными поверхностями можно найти в работе [28], в которой решена обратная задача: показано, что, задавая равновесное состояние, можно найти интегралы движения во всех порядках.

§ 5.3. Лабораторная плазма. Методы удержания плазмы

Введение. Существуют такие ситуации, в которых возможно удержание заряженных частиц магнитным полем. В § 5.2 рассмотрено удержание частиц с помощью дипольного поля, представляющего собой приближенно магнитное поле Земли. Частицы, захваченные магнитным полем Земли, образуют радиационные пояса Ван Аллена. Другое приложение задачи удержания заряженных частиц связано с проблемой управляемого термоядерного синтеза, где горячая плазма большой плотности должна быть физически изолирована от взаимодействия с твердыми поверхностями. Для этого было исследовано большое число магнитных конфигураций; мы дадим краткий обзор основных методов удержания плазмы. Для каждой конфигурации имеется ряд вопросов, на которые необходим ответ для того, чтобы установить, будет ли эта конфигурация пригодна для практического удержания данной плазмы:

1. Удерживается ли отдельная частица полем в заданных границах удерживающего сосуда?

2. Имеется ли равновесная конфигурация для плазмы большой плотности, воздействующей на удерживающее поле?

3. Устойчиво ли равновесие, т. е. приводят ли возмущения равновесного состояния к устойчивым или затухающим колебаниям около равновесия?

4. Какова скорость потерь частиц из-за эффектов негамильтоновского характера, таких, как процессы рассеяния; каковы потери энергии за счет излучения проводимости и т. д.? Не приведут ли эти потери к уменьшению времени удержания?

5. Возможна ли инжекция частиц в удерживающем поле?

6. Могут ли частицы быть нагретыми до подходящей температуры после захвата в ловушку?

В этом параграфе рассмотрен первый вопрос. В § 5.4 исследуются различные аспекты шестого вопроса. Пятый вопрос обсуждается в § 5.5. Все эти темы относятся к общей теории, которую мы разработали. Самый важный вопрос в настоящее время — третий, и хотя коллективные эффекты, которые приводят в настоящее время к неустойчивым плазмам, могут в принципе исследоваться методами фазового пространства, этот метод не получил широкого распространения на практике. Здесь будет лишь кратко упомянуто о вопросах устойчивости, поскольку этот аспект проблемы выходит за рамки данной книги.

При исследовании движения заряженных частиц обычно разделяют движение на вращение вокруг силовой линии, колебание вдоль

силовой линии и медленный дрейф частицы от одной силовой линии к другой (приближение ведущего центра, которое обсуждалось в § 5.1). В первом приближении вращение образует замкнутую орбиту и удержание определяется дрейфовыми движениями u_{\parallel} и u_{\perp} ведущего центра; удержание частиц тогда зависит от ограниченности движения ведущего центра. Для u_{\parallel} это значит, что либо силовые

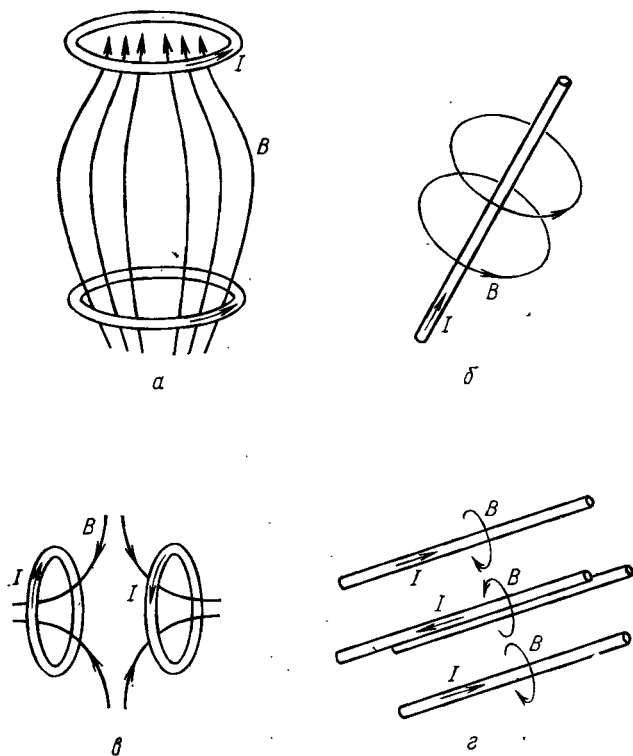


Рис. 5.8. Конфигурации магнитного поля: полоидальное (а); тороидальное (б); симметричный касп (в); квадрупольный касп (г).

линии не должны выходить из области удержания, либо на границе предполагаемой области удержания должны быть созданы точки поворота для движения частиц. Для u_{\perp} это значит, что поперечный дрейф от одной силовой линии к другой описывает орбиту, не выходящую за пределы области удержания. Хотя удержание отдельной частицы не гарантирует ни равновесия, ни устойчивости плазмы, в общем это необходимое, если не достаточное, условие удержания плазмы.

Различают два основных вида магнитных конфигураций: 1) *полоидальные* поля (рис. 5.8, а), в которых силовые рас-

положены на поверхности, проходящей через ось симметрии; 2) *тороидальные* поля (рис. 5.8, б), в которых силовые линии перпендикулярны к этим поверхностям. Первый вид служит основой для *открытых* систем, в которых линии поля замыкаются вне области удержания, тогда как второй образует основу для большинства *замкнутых* систем, в которых линии поля замыкаются внутри области удержания. На рис. 5.8, а показано полоидальное поле, созданное двумя круговыми токами одного направления, а на рис. 5.8, б — тороидальное поле от прямого токнесущего проводника. Практическая удерживающая система, соответствующая изображенному на рис. 5.8, б полю, представляет собой вакуумный тороидальный резервуар, весь плотно обмотанный витками. Симметричные магнитные «зеркала» (пробки), как мы уже видели в § 5.2 при рассмотрении дипольного поля, удерживают осцилляторные орбиты вдоль силовых линий и удерживают азимутальный дрейф, перпендикулярный к силовым линиям. В простом тороидальном поле частицы имеют дрейфовое движение, скорость которого определяется выражением (5.22) и направлена под прямым углом к ΔB и B , так что частицы дрейфуют к стенкам камеры. Нужно отметить, что частицы противоположного знака дрейфуют в противоположном направлении, поэтому при конечной плотности плазмы происходит разделение заряда, что приводит к появлению электрического поля и, следовательно, к дрейфу $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ под прямым углом к начальным дрейфам. Большие потери частиц в тороидальных полях могут быть предотвращены путем добавления спиральной обмотки, которая вводит вращательное преобразование магнитных силовых линий, так что каждая силовая линия завивается в спираль, образуя тороидальную магнитную поверхность. В этом методе дрейфы компенсируются, так что частицы оказываются запертыми. Более подробный анализ приведен у Крускала и др. [31] и у Спитцера [58].

Поле симметричной магнитной ловушки в средней плоскости уменьшается с расстоянием от оси, что приводит к неустойчивости, заключающейся в том, что плазма движется в область более слабого поля с помощью перестановки линий поля [51]. Тороидальные поля также подвержены этой неустойчивости, но они стабильны в приближении бесконечной проводимости плазмы, что обусловлено сдвигом магнитных силовых линий. Однако они не будут стабильны, если сопротивление плазмы конечно [23]. Устойчивое равновесие может быть достигнуто при удержании плазмы в области, в которой магнитное поле всюду возрастает с расстоянием. Такое магнитное поле полоидального вида с остроугольной геометрией [65], называемое каспом, может быть образовано изменением направления тока в одной из обмоток магнитного зеркала, что приводит к аксиально-симметричному каспу (рис. 5.8, в). Четыре прямых проводника (направления токов показаны на рис. 5.8, г) образуют двумерный касп, эквивалентный магнитному квадруполью (см. § 3.3). Вследствие симметрии магнитное поле в центре каспа равно нулю, что ведет к нарушению условий адиабатичности (5.1) и, следовательно, к не-

адиабатическому рассеянию частиц в конус потерь. Неадиабатическая область может быть уничтожена либо «протыканием» аксиально-симметричного каспа центральным токонесящим проводником, либо специальным совмещением обычной ловушки с магнитными пробками и двумерного каспа. Последняя конфигурация применяется весьма успешно и более подробно исследована в § 5.3.

Для замкнутых систем можно показать, используя топологические методы, что конфигурации с минимумом B не могут существовать без встроенных проводников. «Средний» минимум B может быть достигнут, однако это приводит к абсолютной устойчивости только тогда, когда вдоль силовой линии будет бесконечная проводимость. В системах со встроенными проводниками центральный стержень дает сильный сдвиг без абсолютного минимума B , а нецентральный стержень обеспечивает абсолютный минимум B . Тороидальный квадруполь, образованный проводниками с током, также приводит к конфигурации с минимумом B [45]. В каждом из этих случаев необходимы специальные приспособления для подвески проводников, что делает установку весьма громоздкой. Можно также встроить ток без проводника наподобие релятивистского электронного слоя в «Астроне» (Кристофилос, 1958 г.), однако не ясно, будет ли такой слой устойчивым.

Устойчивые тороидальные или другие замкнутые конфигурации имеют важное преимущество перед открытыми: частицы не могут быть потеряны при рассеянии в конус потерь в пространстве скоростей, но они должны покидать область удержания при многократном рассеянии, что вызывает перенос частицы поперек силовой линии. Однако замкнутые конфигурации имеют тот недостаток, что для получения минимума B необходимо вводить встроенные проводники. К тому же необходимое условие удержания отдельной частицы для тороидальных систем полностью не определено. Как показано в § 2.4, необходимым условием для удержания является существование либо точных, либо адиабатических интегралов движения. Мы показали, что при определенных условиях эти интегралы движения перестают существовать и частицы не будут удержаны. Для полоидальных систем имеется хорошее доказательство существования областей с достаточным числом адиабатических интегралов, чтобы гарантировать удержание, а также существование других областей, в которых это будет не так. Для тороидальных систем имеется ряд все еще не решенных вопросов.

Симметричные полоидальные поля. Для симметричных конфигураций важные сведения можно извлечь из первых интегралов движения, не получая точного решения как функции времени. Рассмотрим нерелятивистский гамильтониан (5.51), вводя скорости v_r и v_z и используя соотношение $v_i = (p_i - eh_i A_i)/h_i$, преобразуем гамильтониан к двумерному виду

$$\frac{1}{2} m v_{(r, z)}^2 + \frac{1}{2m} \frac{(p_{\phi 0} - er A_{\phi})^2}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_{0(r, z)}^2 + \frac{1}{2m} \frac{(p_{\varphi 0} - e r_i A_{\varphi 0})^2}{r_i^2} = E. \quad (5.85)$$

Здесь мы выразили гамильтониан явно через начальные значения. Так как p_{φ} постоянно, всюду будем писать $p_{\varphi 0}$. Потенциал

$$U(r, z) = \frac{1}{2m} \cdot \frac{(p_{\varphi 0} - e r A_{\varphi})^2}{r^2} \quad (5.86)$$

можно считать эквивалентным двумерным потенциалом, аналогичным потенциалу в задаче Кеплера, которая рассмотрена в § 1.1. Кинетическая энергия в $r-z$ -плоскости равна $m v_{(r, z)}^2/2$ и всюду положительна, поэтому из (5.85) имеем

$$E - \frac{1}{2m} \cdot \frac{(p_{\varphi 0} - e r A_{\varphi}(r, z))^2}{r^2} \geq 0, \quad (5.87)$$

что дает пределы отклонения частицы. Для частиц, вращающихся вокруг оси в поле магнитного зеркала (однородное по r , возрастающее по z), пределы отклонения частиц легко найти. Для орбиты, симметричной относительно центра симметрии магнитного поля, простейшее доказательство следует непосредственно из постоянства p_{φ} , из которого имеем

$$m r v_{\varphi} + e r^2 B_z = \text{const},$$

где использовано, что $A_{\varphi} = r B_z$ в симметричном поле, однородном по r . Подставив v_{φ} , имеем $v_{\varphi} = e r B_z / m$. Таким образом, получаем

$$2 e r^2 B_z = \text{const} \quad (5.88)$$

или

$$2 m r v_{\varphi} = \text{const}. \quad (5.89)$$

Из (5.88) видно, что r уменьшается с ростом B_z , а из (5.89) следует, что при этом v_{φ} должно увеличиваться, что приведет к отражению при $v_{\varphi} = v$. Следуя Шмидту [52], можно обобщить этот результат и на неаксиально-симметричные орбиты. Для частиц, удерживаемых в радиальном направлении, должна существовать потенциальная яма по r , внутри которой частицы осциллируют. Частица может выйти из области удержания, когда $\bar{U}(r, z)$ минимально, и поэтому, чтобы гарантировать захват частицы, минимальный потенциал должен быть больше E . Дифференцируя по r , находим условие минимума \bar{U} .

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} = - \frac{p_{\varphi 0} - e r A_{\varphi}}{m r} \left(\frac{p_{\varphi 0}}{r^2} - e \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial r} \right) = 0. \quad (5.90)$$

Уравнение (5.90) удовлетворяется либо когда

$$p_{\varphi 0} - e r A_{\varphi} = 0, \quad (5.91)$$

либо при

$$(p_{\varphi 0} / r^2) - (\partial A_{\varphi} / \partial r) = 0. \quad (5.92)$$

Первый случай соответствует $v_{\varphi} = 0$. Здесь $\bar{U} = 0$, поэтому условие (5.87) для $E > 0$ может не выполняться. Во втором случае получим

$$\bar{U}_{\text{мин}} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{(p_{\varphi 0} - e r_0 A_{\varphi})^2}{r_0^2}, \quad (5.93)$$

где r_0 удовлетворяет условию (5.92). В этом случае $E < \bar{U}_{\text{мин}}$ является достаточным условием для захвата. Условие (5.91) удовлетворяется только для частиц, не охватывающих ось, тогда как условие (5.92) — обобщение результата, полученного для аксиально-симметричных орбит, — удовлетворяется для частиц, охватывающих ось. Это общее ограничение на отклонение частиц порождает «запрещенную» область, которая не зависит от скорости изменения поля, а зависит только от сохранения углового момента.

Для частиц, которые вследствие общих законов сохранения не удерживаются, орбиты все же могут быть ограниченными, если движение адиабатическое, т. е. если удовлетворяется условие (5.1). Мы видели в § 5.1, что адиабатическое постоянство магнитного момента может приводить к удержанию частиц в определенных полях; в § 5.2 проблема диполя исследована с учетом этого факта. Для симметричных полей, рассматриваемых здесь, годится тот же анализ, что и в § 5.1, так что уравнение для постоянства кинетической энергии вместе с соотношением между магнитным моментом и поперечной кинетической энергией [см. уравнение (5.11)] дает

$$(1/2) m v_{\parallel}^2 + \mu B_z = E = (1/2) m v_{\parallel 0}^2 + \mu B_{z_0}. \quad (5.94)$$

Для всех орбит, которые могут проникать в область с достаточно высоким значением поля B_z , так что $\mu B_z = E$, частицы отражаются. Если обозначим это поле B_m , а поле в центре симметричной ловушки с магнитными пробками B_0 , то (5.94) в точке поворота принимает вид

$$\mu B_m = (1/2) m v_{\parallel 0}^2 + \mu B_0. \quad (5.95)$$

Определяя пробочное отношение как $\mathcal{R}_m = B_m/B_0$, а угол $\theta = \arccos(v_{\parallel}/v)$, соотношение (5.95) после перегруппировки членов имеет вид $1 - 1/\mathcal{R}_m = m v_{\parallel 0}^2 / 2\mu B_m$ или после подстановки $\mu B_m = m v^2 / 2$ в правую часть уравнения

$$\mathcal{R}_m = 1/\sin^2 \theta_0. \quad (5.96)$$

Таким образом, все частицы с начальными углами θ , большими θ_0 , отражаются прежде, чем достигается максимум B_m . Все частицы с $\theta < \theta_0$ при $B = B_0$ оказываются в конусе потерь в пространстве скоростей и уходят из области удержания. Как мы видели в § 5.2, в дипольном поле существуют аналогичные области захвата и конусы потерь. Приближенные орбиты в симметричной ловушке с магнитными пробками исследуем в § 5.3.

В поле типа каспа существуют как адиабатические, так и неадиабатические орбиты. Рассмотрим касп, имеющий вращательную симметрию (см. рис. 5.9, *a*). В зависимости от энергии частицы, ее углового момента и радиуса силовой линии, охватываемой частицей, орбиты могут быть адиабатическими, оставаясь все время на магнитной поверхности, или неадиабатическими (как представленные на рисунке орбиты). Адиабатические орбиты имеют место, когда μ и J постоянны, эти орбиты аналогичны орбитам с большой кривизной, которые были рассмотрены в гл. 2 при изучении диполя. Для неадиабатических орбит все же можно получить некоторую информацию о движении частиц. Например, в средней плоскости ($z = 0$) $A_\varphi = 0$ и минимальное расстояние частицы от оси определяется из (5.87):

$$r_{\min}^2 = p_{\varphi 0}^2 / (2mE). \quad (5.97)$$

Кроме того, для частицы, движущейся вдоль силовой линии с $v_\varphi = 0$,

$$p_\varphi = erA_\varphi. \quad (5.98)$$

После того как частица пересечет среднюю плоскость, A_φ меняет знак, а \bar{U} остается положительным, поэтому характер орбиты изменяется: частица вращается не вокруг силовой линии, а вокруг оси. Это явление экспериментально обнаружили Синнис и Шмидт [57]. Максимальное проникновение по z наблюдается, когда \bar{U}_{\min} (относительно r) в точности равно начальной энергии $mv_{z0}^2/2$, так что из (5.93) получим

$$\frac{1}{2} mv_{z0}^2 = \frac{1}{2m} \cdot \frac{[p_{\varphi 0} - er_0 A_\varphi(r_0, z_{\max})]^2}{r_0^2}, \quad (5.99)$$

где r_0 определяется, как и прежде, из (5.92). Можно также найти критическую скорость для частицы, траектория которой пронизывает всю область каспа, причем она покидает касп, если попадает в равное и противоположное положение на дальней стороне каспа. Положим, что начальное поле, заданное уравнением (5.98), однородно, так что

$$p_\varphi = erA_\varphi = er^2 B_0 / 2. \quad (5.100)$$

Подставляя (5.100) в (5.99), получаем $(1/2)mv_{z0}^2 \geq (1/2)m [(er_0^2 B_0)^2 / r_0^2]$ или

$$v_{z0} > er_0 B_0 / m \quad (5.101)$$

для частицы, пересекающей касп. Используя (5.92), найдем, что $r_0 = r_i$, где r_i — радиус инжекции.

Для частицы с произвольно выбранными внутри каспа начальными координатой и скоростью трудно предсказать детальное движение. Однако если частица исследуется в центральной области каспа, то μ не сохраняется и p_φ , вероятно, мало. В этом случае частица уйдет из каспа после достаточного числа прохождений цен-

тральной области. Бринкман [8] вычислил на ЭВМ такие орбиты (рис. 5.9, а), изменение B и магнитный момент (рис. 5.9, б). Магнитный момент заметно изменяется в области слабого поля. Центральная область поэтому действует как рассеивающий центр, который позволяет частицам входить в конус потерь.

Если плотность частиц внутри каспа конечна, то анализ движения отдельной частицы не дает полного представления о поведении плазмы. Более того, для малых плотностей коллективные эффекты делают плазму неустойчивой внутрь, так что частицы, которые являются адиабатически захваченными по одночастичной теории, движутся внутрь области слабого поля — области неадиабатических потерь частиц. Для больших плотностей плазма вытесняет магнитное поле из центральной области и фактические потери частиц определяются эффектами экранировки. Анализ коллективных эффектов не является целью этой книги. Описание этого явления дано в книге [2].

Приближенное определение движения частиц в ловушке с магнитными пробками. Мы уже видели в § 1.1 и 1.2, что применение интегралов действия может сильно облегчить решение данной динамической задачи. Эти соображения использованы при описании адиабатической инвариантности в гл. 2, а также в § 5.1, 5.2 и 5.3. В § 5.2 показано, что движение частицы в поле диполя может быть сведено к квадратурам, если использовать биполярные координаты и соответствующие переменные действия, хотя эти интегралы могут быть вычислены только приближенными методами. Этот же метод использован для получения приближенного решения уравнения движения частиц в симметричной ловушке с магнитными пробками. Однако здесь не существует такой системы координат, в которой движение естественным образом разделяется на вращательное движение и движение ведущего центра. Но поскольку силовые линии в большинстве ловушек такого типа представляют собой приблизительно прямые линии, может быть использована теория возмущения для получения приближенного решения. В вычислении используется метод усреднения (см. § 1.4). Переменные действия аналогичны адиабатическим интегралам (см. § 5.1), однако выбор криволинейной системы координат позволяет непосредственно вычислить члены первого порядка, как в § 5.2. Здесь мы следуем работе [35], в которой были приведены вычисления для аксиально-симметричной ловушки с магнитными пробками, включая и вычисление равновесной плотности распределения [36]. Однако следует указать, что для асимметричных полей нельзя найти систему координат, в которой бы переменные разделялись. К этому случаю наиболее подходит общая адиабатическая теория.

Предположим, что поле имеет вид

$$B_z = B_0 [1 + K\alpha(z)], \quad (5.102)$$

где $K = 1/B_0$ — параметр разложения, причем $K\alpha \ll 1$. Как и в § 5.2, силовые линии симметричны и не содержат вихрей. Следо-

вательно, они могут быть получены из векторного или скалярного потенциала:

$$B_z = \nabla \times A \quad \text{или} \quad B_z = -\nabla V, \quad (5.103)$$

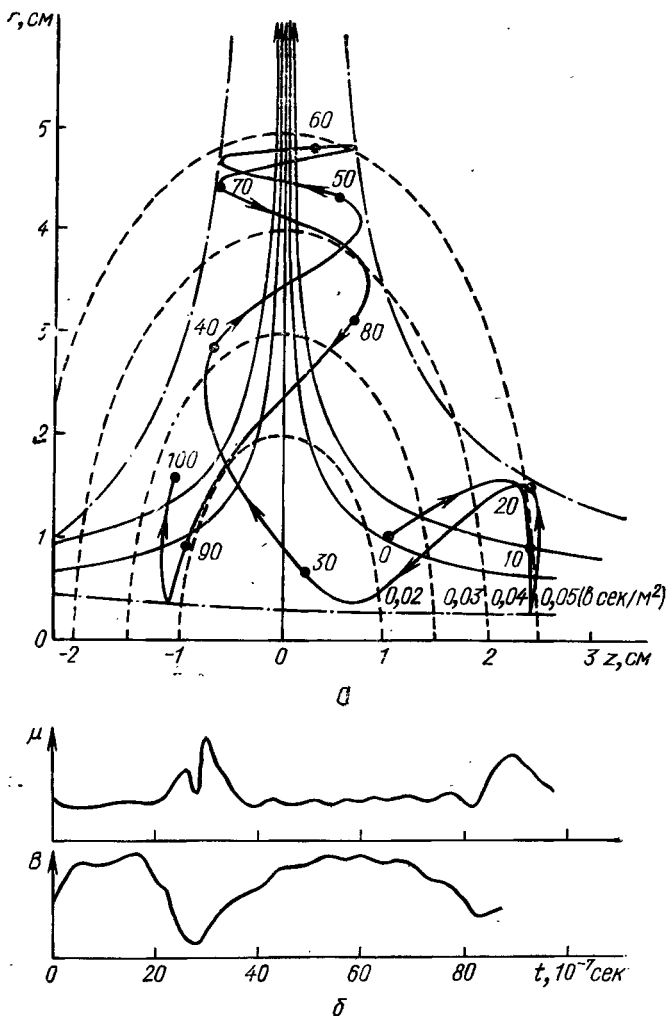


Рис. 5.9. Траектория частицы в квадрупольном магнитном поле (а) и соответствующие изменения магнитного момента и магнитного поля (б) [8]:

— траектория частицы; — магнитные силовые линии;
 - - - - линии постоянной напряженности поля; - · - - граничные кривые.

причем в цилиндрических координатах существует только компонента векторного потенциала A_ϕ . Подставляя (5.102) в (5.103), получаем

$$A_{\varphi}(r, z) = \frac{rB_0}{2} \left[1 + K \left(\alpha - \frac{r^2 \alpha''}{8} + \dots \right) \right]. \quad (5.104)$$

Гамильтониан частицы, движущейся в таком консервативном поле, согласно (5.85) имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{(p_{\varphi} - rA_{\varphi})^2}{r^2} + p_z^2 \right] = E. \quad (5.105)$$

Как в § 5.2, разобьем движение на движение около ведущего центра и движение самого ведущего центра. В § 5.2 использована двумерная система, так как предполагалось, что азимутальные дрейфы отсутствуют. Используя теорию возмущения, можно включить

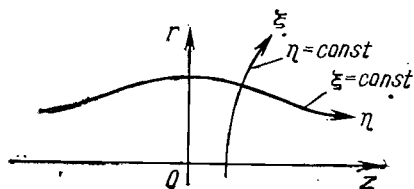


Рис. 5.10. Naturalная система координат для зеркального магнитного поля.

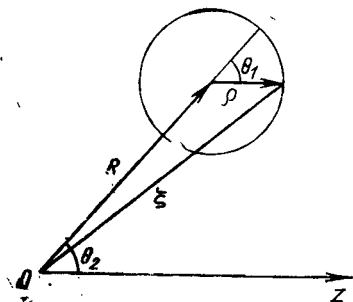


Рис. 5.11. Диаграмма для построения канонической системы координат, соответствующей адиабатически разделенным степеням свободы.

в рассмотрение третью координату, что здесь и будет сделано. Как и в случае поля диполя, натуральной системой координат η , ξ (рис. 5.10) является система, в которой $\eta = \text{const}$ вдоль линии постоянного потенциала, $f_1(\eta) = V(r, z)$ и $\xi = \text{const}$ вдоль силовой линии, $f_2(\xi) = rA_{\varphi}(r, z)$. Это — явное выражение для η и ξ через переменные r и z , соответствующие (5.96) и (5.97). По аналогии с гамильтонианом (5.63) гамильтониан в новой системе координат имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left[\frac{p_{\xi}^2}{h_{\xi}^2} + \frac{(p_{\varphi} - erA_{\varphi})^2}{r^2} + \frac{p_{\eta}^2}{h_{\eta}^2} \right], \quad (5.106)$$

где r , h_{ξ} и h_{η} — функции ξ и η . Лакина вычислил эти функции, но мы не будем повторять эти вычисления.

Приступим теперь к преобразованию координат ξ , η , φ к соответствующему набору переменных угол—действие. На основе § 5.1 координаты являются адиабатически разделимыми, если движение можно разделить на вращение, движение вдоль силовой линии, которое также является параллельной компонентой движения ведущего центра, и дрейф ведущего центра, перпендикулярный

к силовой линии. Координата η подходит для получения продольного инварианта, однако ξ и φ необходимо еще преобразовать. Необходимое преобразование можно сконструировать, пользуясь рис. 5.11. Перейдем непосредственно к переменным угол—действие, используя процедуру разделения на вращательное и дрейфовое движение. Если угловой момент вращения равен J_1 , а угловой момент дрейфа — J_2 , то радиусы вращательного движения и движения ведущего центра равны соответственно

$$\rho = (2J_1/m\omega_c)^{1/2} \quad (5.107a)$$

и

$$R = (2J_2/m\omega_D)^{1/2}, \quad (5.107b)$$

где ω_c и ω_D — соответственно циклотронная частота и угловая частота дрейфа. Введем канонические угловые переменные θ_1 и θ_2 , разложив геометрические соотношения в точке $z = 0$, так что ξ определяется по формуле косинусов $\xi^2 = \rho^2 + R^2 + \rho R \cos \theta_1$, что дает

$$\xi^2 = \frac{2J_1}{m\omega_c} + \frac{2J_2}{m\omega_D} + \left(\frac{2J_1 J_2}{m^2 \omega_c \omega_D} \right)^{1/2} \cos \theta_1. \quad (5.108)$$

Аналогично используя геометрические соотношения, можно связать другие переменные. Однако вместо этого введем приближение, сделанное Зейделем [53]: пусть $\rho \ll R$, т. е. магнитное поле очень сильное, так что частицы спирально закручиваются вокруг силовой линии. Зейдель использует это приближение при рассмотрении ВЧ-циклотронного резонансного нагрева, описываемого в § 5.4. Лакина использовал более полный формализм для получения совокупности интегралов уравнений движения, не делая ограничений обычными условиями адиабатичности. Однако в теории возмущений, которая необходима для получения численного результата, нужно обязательно использовать подобное условие.

В приближении Зейделя имеем $\xi = R + \rho \cos \theta_1$, или в обозначениях Зейделя

$$\xi_n = (2P_2)^{1/2} + (2P_1)^{1/2} \cos \theta_1, \quad (5.109a)$$

где $2P_2$ и $2P_1$ можно считать нормированными угловыми моментами или нормированными радиусами R^2 и ρ^2 соответственно; ξ_n — соответствующим образом нормированный радиус-вектор. Отметим, что в пределе при $\omega_D \rightarrow 0$ также $J_2 \rightarrow 0$, но нормированные значения все еще существуют. Используя то же самое приближение $\rho \ll R$, можно получить преобразования другой поперечной координаты

$$\varphi \approx \theta_2 - (P_1/P_2)^{1/2} \theta_1; \quad (5.109b)$$

для соответствующего момента имеем $p_\varphi = J_2 + J_1$. Это соотношение следует непосредственно из теоремы механики: полный угловой

момент равен сумме углового момента центра масс и углового момента относительно центра масс [26], и так как в нашей нормированной форме $P_2 \gg P_1$, то приближенное преобразование ($p_{\varphi n}$ — нормированное p_{φ}) имеет вид

$$p_{\varphi n} \approx P_2. \quad (5.109\text{в})$$

p_{ξ} также легко найти, если считать ларморовский радиус малым. Из рис. 5.11 видно, что $p_{\xi} = m\omega \sin \theta_1$, где ω — скорость вращения, или, выражая через угловой момент, имеем $p_{\xi} = (2J_1/\rho) \sin \theta_1$, используя (5.107) и нормировку, получаем

$$p_{\xi} = (2P_1)^{1/2} \sin \theta_1. \quad (5.109\text{г})$$

Приведенные выше уравнения (5.109а)—(5.109г) дают преобразование к переменным угол — действие в перпендикулярной плоскости. Эти преобразования можно получить из теории преобразования с учетом производящей функции, введенной Зейделем, $F_2 = \varphi P_2 - \int [2P_1 - (\xi - (2P_2)^{1/2})^2]^{1/2} d\xi$. Уравнения (5.109) можно проверить, подставив F_2 в преобразование (1.34).

Можно также получить интеграл действия для продольного движения, однако прежде покажем, что теория возмущений применима для описания движения в слабом поле ловушки. В предположении однородности поля гамильтониан (5.106) сильно упрощается, поскольку $h_{\xi} = h_{\eta} = 1$, $r = \xi$ и $A_{\varphi} = rB_0/2$. Поэтому для однородного поля

$$H_{\text{о.п}} = \frac{1}{2m} \left[p_{\xi}^2 + \frac{(p_{\varphi} - eB_0 \xi^2/2)^2}{\xi^2} + p_{\eta}^2 \right].$$

Теперь пронормируем квадраты всех величин на напряженност-магнитного поля, т. е. $p_{\xi n}^2 = p_{\xi}^2 / eB_0$. Тогда гамильтониан для однородного поля примет вид

$$H_{\text{о.п}} = \frac{\omega_c}{2} \left[p_{\xi n}^2 + \frac{(p_{\varphi n} - \xi_n^2/2)^2}{\xi_n^2} + p_{\eta n}^2 \right]. \quad (5.110)$$

Подставляя преобразования (5.109), получаем гамильтониан в первом порядке по $(P_1/P_2)^{1/2}$ как функцию нормированных поперечных переменных угол—действие и $p_{\eta n}$:

$$H_{\text{о.п}} = \omega_c \left[P_1 \sin^2 \theta_1 \frac{(P_2/2 + (P_1 P_2)^{1/2} \cos \theta_1 + P_1 \cos^2 \theta_1)^2}{[(P_2)^{1/2} + (P_1)^{1/2} \cos \theta_1]^2} \right] + \frac{\omega_c}{2} p_{\eta n}^2. \quad (5.111)$$

В предположении, что $P_2 \gg P_1$, получаем $H_{\text{о.п}} = \omega_c P_1 + (\omega_c/2) p_{\eta n}^2$. Мы получили гамильтониан частицы спирально закручивающейся вокруг силовой линии без учета дрейфа, перпендикулярного к силовым линиям. С учетом кривизны поля гамильтониан, вычисленный Лакина [35] в первом порядке по B/B_0 , имеет вид

$$H_0 = \omega_c P_1 \frac{B}{B_0} + \frac{\omega}{2} \cdot \frac{p_{\eta n}^2}{\langle h_{\eta} \rangle_{\theta_1}}, \quad (5.112)$$

где h_η усредняется по вращательному движению.

Теперь получим интеграл действия для продольного движения, используя обычную процедуру интегрирования импульса по полному периоду продольного колебания, что в нормированном виде дает $P_3 = (1/2\pi) \oint p_{\eta n} d\eta$. Подставляя $p_{\eta n}$ из (5.112), имеем

$$P_3 = \frac{(2P_1)^{1/2}}{2\pi} \oint \langle h_\eta \rangle \left(\frac{H_0}{\omega_c P_1} - \frac{B}{B_0} \right) d\eta. \quad (5.113)$$

Если расстояние между точками поворота равно $2L_s$, то приближенно изменение магнитного поля (5.102) выразим как

$$1 + K\alpha(z) \simeq 1 + Kz^2/L_s^2 \simeq 1 + K\eta^2, \quad (5.114)$$

которое справедливо для малых отклонений η . Далее имеем $K\eta^2 = B/B_0$ и для максимального отклонения $K\eta_m^2 = H_0/\omega_c P_1$, так что (5.113) приближенно можно записать как

$$P_3 = \frac{(2P_1 K)^{1/2}}{2\pi} \oint (\eta_m^2 - \eta^2)^{1/2} d\eta. \quad (5.115)$$

Здесь мы положили $h = 1$ в согласии с приближением (5.114). После интегрирования (5.115) получим η_m как функцию P_3 и P_1 :

$$\eta_m^2 = (2/K)^{1/2} (P_3/P_1^{1/2}). \quad (5.116)$$

Полное преобразование получено из производящей функции F_2 , которая является функцией старых координат и новых импульсов.

Так как старые и новые импульсы P_1 и P_2 идентичны, возьмем производящую функцию в виде

$$F_2 = P_1 \theta_1 + P_2 \theta_2 + (2P_1 k)^{1/2} \int (\eta_m^2 - \eta^2)^{1/2} d\eta, \quad (5.117)$$

откуда новые угловые переменные запишутся как

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \partial F_2 / \partial P_1 = \theta_1 + \frac{1}{2} (K/2P_1)^{1/2} \eta (\eta_m^2 - \eta^2)^{1/2}; \\ \omega_2 &= \partial F_2 / \partial P_2 = \theta_2; \\ \omega_3 &= \partial F_2 / \partial P_3 = \arcsin(\eta/\eta_m). \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Преобразованный гамильтониан представляет собой функцию переменных действия плюс осцилляторный член, которым можно пренебречь. Зейдель вычислил этот гамильтониан, получив выражение

$$H_0 = \omega_c P_1 \left[\gamma_0(P_2) + \frac{P_3}{P_1^{1/2}} \gamma(P_2) + \frac{P_3^2}{P_1} \gamma_2(P_2) + \dots \right], \quad (5.119)$$

где

$$\gamma_0(P_2) = 1 - KP_2 - (1/2) KP_2^2; \quad (5.120)$$

$$\gamma_1(P_2) = (2K)^{1/2} (1 + KP_2 - 3K^2 P_2^2 + \dots); \quad (5.121)$$

$$\gamma_2(P_2) = 10K^2 P_2 (1 - 4KP_2 + (9/2) K^2 P_2^2 + \dots). \quad (5.122)$$

Частоты могут быть получены из уравнений Гамильтона $v_i = \partial H_0 / \partial P_i$. Импульсы P_i должны быть вычислены из своих определяющих уравнений и соответствующих разложений поля. Взяв соответствующие производные, получим соотношения

$$v_1 = \omega_c \left[1 - KP_2 + \frac{1}{2} K (1 + KP_2) \eta_m^2 \right]; \quad (5.123)$$

$$v_2 = \omega_c KP_1 [1 - K\eta_m^2 - 5K^3 \eta_m^4]; \quad (5.124)$$

$$v_3 = \omega_c (2KP_1)^{1/2} [1 + KP_2 + 10K^2 P_2 \eta_m^2], \quad (5.125)$$

определяющие соответственно циклотронную частоту, частоту азимутального дрейфа и частоту продольного колебания. Составляющие энергии можно также вычислить как функцию инвариантных импульсов; в средней плоскости имеем

$$E_{\perp}(0) = m\omega_c^2 L_s^2 \gamma_0(P_2) P_1; \quad (5.126)$$

$$E_{\parallel}(0) = m\omega_c^2 L_s^2 [\gamma_1(P_2) P_3 P_1^{1/2} + \gamma_2(P_2) P_3^3]. \quad (5.127)$$

Уравнения (5.116), (5.117) и (5.118) выражают начальные условия через инварианты. Они будут использованы в § 5.4 для сравнения результатов, полученных аналитически, с результатами, полученными численными методами.

Дальнейшие вычисления приведены в работе Лакина [35]. Для малых отклонений продольного движения от средней плоскости этот анализ дает решения, независимые от адиабатических свойств интегралов действия.

Движение в удерживающих полях без азимутальной симметрии. Из предыдущего обсуждения видно, что удерживающие поля без азимутальной симметрии занимают важное место среди различных типов удерживающих магнитных систем. Для асимметричных полей приближенные аналитические решения, найденные в предыдущем разделе, больше непригодны. Однако адиабатические интегралы все же полезны для упрощения описания движения частиц. В качестве примера использования адиабатических интегралов довольно подробно рассмотрим конфигурацию магнитного поля с минимумом B , состоящую из двух обмоток, создающих магнитные зеркала, и квадрупольной обмотки, состоящей из четырех проводников с противоположными направлениями токов, которая располагается под прямым углом к зеркальной обмотке. Эта конфигурация впервые была использована в эксперименте Готта, Иоффе и Тельковского [27]. Подробный анализ движения одиночной частицы был дан Сиамбисом [54]; будем следовать его методу и представим здесь некоторые основные полученные им результаты. На рис. 5.12 показана модель, иллюстрирующая конфигурацию трубки потока или потоковой поверхности такой системы вместе с совокупностью потоковых линий. Поверхность трубки потока закручивается вокруг квадрупольных стержней (стержни не показаны на рисунке). По мере уменьшения площади поперечного сечения поверхности постоянного потока величина магнитного поля должна увеличиваться, тем самым

обеспечивая отражение частиц, движущихся по спирали вдоль силовых линий. Кроме того, частицы совершают дрейф поперек силовых линий, однако они остаются на потоковой поверхности, поскольку, как показано в § 5.1, поток, охватываемый этой поверхностью, является интегралом движения.

Движение частицы с тремя степенями свободы сводится к движению ведущего центра усреднением по вращательному движению (см. § 5.1). Движение ведущего центра содержит магнитный момент μ в качестве параметра, и для адиабатически постоянного μ движение ведущего центра было сведено к двум степеням свободы. Число степеней свободы может быть еще уменьшено за счет введения про-

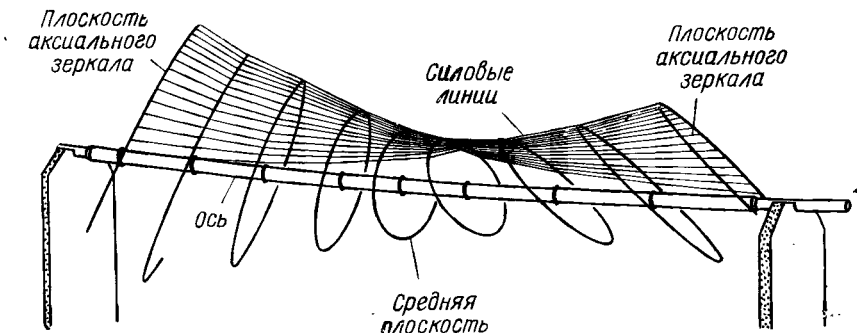


Рис. 5.12. Поточковая трубка для зеркального квадрупольного поля [$L/R_0 = 3$; $R_m = 1,5$; $l/B_0R_0 = 1,25$; R_0 — радиус квадрупольных стержней].

дольной адиабатической константы J . Для данного набора начальных условий вычислим μ непосредственно, а затем, интегрируя движение частицы по отдельной продольной орбите, получим выражение для J :

$$J = \oint \left(v^2 - \frac{2\mu}{m} B \right)^{1/2} ds,$$

где траектория взята вдоль силовой линии, заданной выражениями

$$dr/ds = B_r/B; \quad d\varphi/ds = B_\varphi/B; \quad dz/ds = B_z/B. \quad (5.128)$$

Интегрирование должно быть выполнено численно для полей с минимумом B . Величина J , вычисленная таким способом, является приближенной, так как интегрирование следовало бы выполнять по действительной орбите, в которой учитывается дрейф. Однако если дрейф мал за время, сравнимое с продольным периодом, оба результата почти совпадают (это было показано Сиамбисом). Не вычисляя непосредственно величину дрейфа, мы можем следить за размахом колебаний по всей потоковой трубке, требуя, чтобы аналогичные интегрирования по другим силовым линиям давали такие же значе-

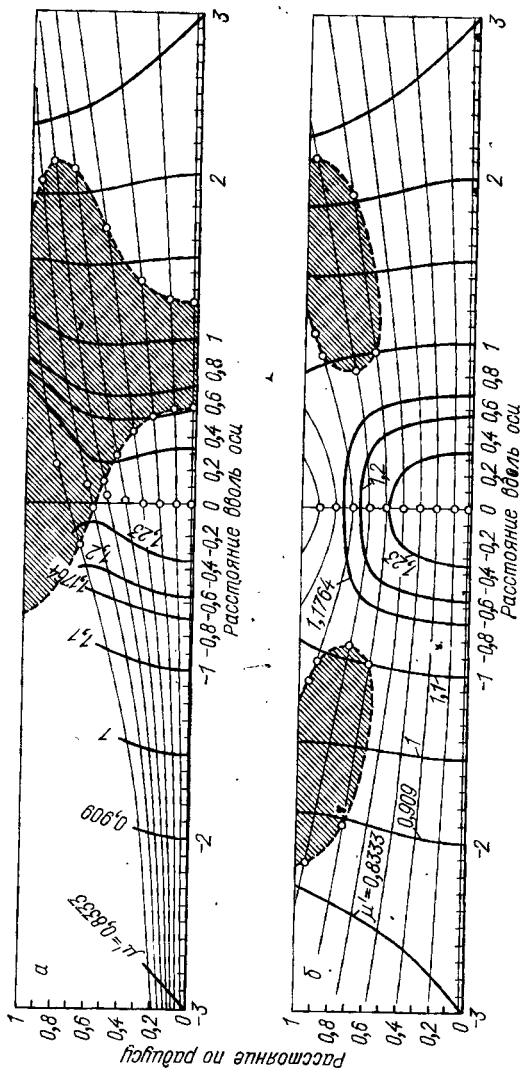


Рис. 5.13. Зеркальное квадратное поле. Силовые линии и магнитные изобары соответствуют указаным значениям магнитного момента ($L/R = 6,0$; $\mathcal{P}_m = 1,5$; $I/B_0 R_0 = 0,5$); силовые линии в плоскости между стержнями (а); проекция на плоскость стержня силовых линий, которые проходят через пересечение средней плоскости с плоскостью стержня (б). Затемненные участки имеют неустойчивую кривизну.

ния J . Результаты вычислений Сиамбиса представлены на рис. 5.13 и 5.14. На рис. 5.13 показаны силовые линии и магнитные изобары; изобары относятся к тому значению μ , при котором данная изобара является точкой поворота. Длины нормированы на R_0 — радиус квадрупольных стержней, а магнитный момент нормирован на то значение μ , для которого частица, близкая к оси, имеет точку поворота, лежащую на середине расстояния между центром и зеркалом. Показана зависимость точек поворота от радиуса для различных значений μ как в плоскости стержня, так и посередине между стерж-

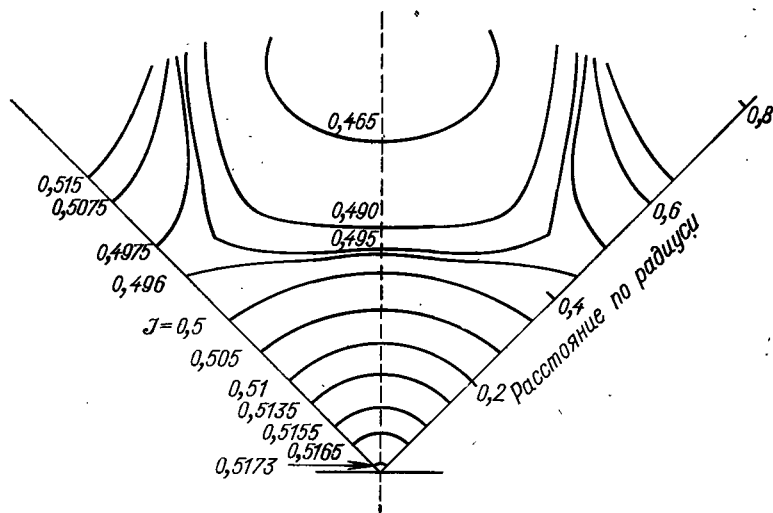


Рис. 5.14. Адиабатические кривые в средней плоскости для различных значений J и среднего магнитного момента $\mu = 1,1$; зеркальное квадрупольное поле: $L/R_0 = 6,0$; $R_m = 1,5$; $I/B_0 R_0 = 0,5$.

нями. Для заданного значения μ величина J уменьшается с увеличением радиуса. Это можно увидеть на рис. 5.14, на котором изображен один квадрант поперечного сечения средней плоскости, взятый симметрично относительно квадрупольного стержня. Дрейфовое движение на кривой постоянного J изменяется от кругового (при малом r) до прямоугольного, являющегося границей между областью удержания и областью, для которой частицы движутся вдоль силовых линий и выходят из объема удержания.

Для больших квадрупольных токов магнитные силовые линии искривляются сильнее и даже для больших значений J (малые радиусы) поверхности постоянного потока сильно отличаются от круговых. Это происходит вследствие больших изменений азимутального поля, что вместе с большими дрейфовыми скоростями из-за сильной кривизны силовых линий может привести к неадиабатическому поведению. Мы увидим далее из численного расчета, что в случае большой азимутальной асимметрии адиабатическая аппрок-

симация для J_{\perp} имеет места даже для относительно малых величин ларморовского радиуса.

Если мы хотим определить дрейфовое движение, то можно провести усреднение по продольному движению, с тем чтобы выразить дрейф непосредственно через две адиабатические константы μ и J . Поперечное смещение ведущего центра в течение одного периода

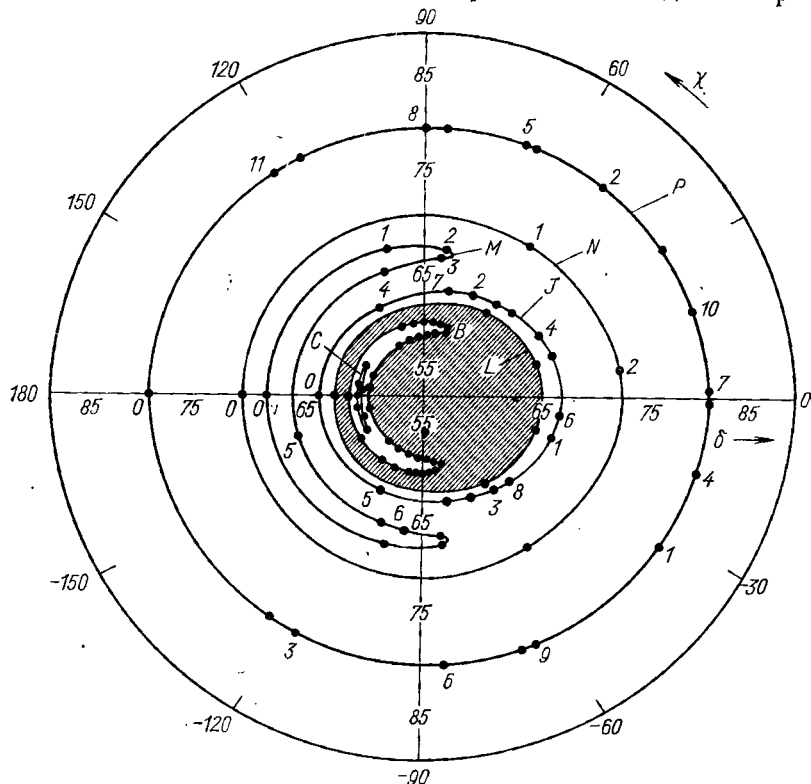


Рис. 5.15. Значения δ и χ , при которых различные орбиты пересекают среднюю плоскость [25].

продольного движения можно получить из дрейфовых уравнений (5.22) путем интегрирования по периоду:

$$\langle v_D \rangle = \oint \mathbf{u}_{\perp} \frac{dt}{dl} dl = - \oint \frac{\mu}{e} \left(1 + \frac{2u_{\parallel}^2}{v_{\perp}^2} \right) \frac{\nabla \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{B u_{\parallel}} dl. \quad (5.129)$$

Уравнение (5.129) трудно оценить непосредственно, однако (5.76) дает приближенную оценку.

Численные оценки пределов адиабатического поведения. Существование интегралов движения может быть выведено из численных расчетов сечений плоскости фазового пространства, как мы уже делали в § 2.4. Если частицы лежат на фиксированной кривой в фа-

звой плоскости независимо от того, в какой момент времени делается сечение, то существует изолирующий интеграл, который разделяет движение по двум степеням свободы. Таким изолирующим интегралом является, например, обобщенный магнитный момент в симметричном магнитном поле ловушки с магнитными пробками. Это представление использовано в § 5.2 для получения адиабатического инварианта в поле диполя. Наряду с этим можно использовать другие системы координат для получения аналогичных данных. Гаррен и др. [25] получили сечения средней плоскости ловушки

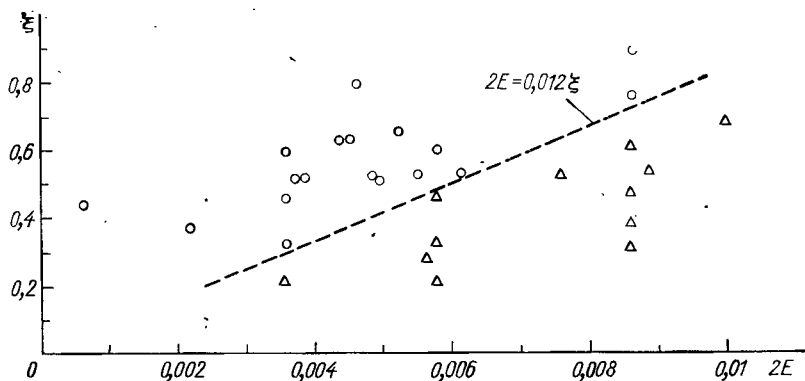


Рис. 5.16. Устойчивые (○) и неустойчивые (△) начальные условия.

с магнитными пробками на полярной диаграмме $\delta - \chi$, где δ — угол между вектором скорости и силовой линией, а χ — угол, измеряемый в плоскости вращения азимутально к силовой линии, причем $\chi = 0$ на перпендикуляре к плоскости, проходящей через силовую линию и ось. Следует отметить, что в средней плоскости $\delta = \arcsin(v_{\perp}/v)$. Результаты численных расчетов Гаррена и др. показаны на рис. 5.15 для частиц, инжектированных с фиксированной энергией, но различными δ . Величины энергии и магнитного поля выбраны так, что диаметры орбит составляют 1/10 расстояния между магнитными пробками. Как и в предыдущих численных расчетах такого типа (см. § 2.4), видно, что орбиты отчетливо разделяются на два типа: одни лежат на фиксированных кривых, а другие беспорядочно пересекаются (затемненная область). Конус адиабатических потерь лежит при $\delta = 55^\circ$ (заметим, что центр диаграммы взят при $\delta = 50^\circ$), однако частицы рассеиваются неадиабатически в конус потерь приблизительно при 65° , который поэтому является эффективным конусом потерь. Имеются два типа устойчивых орбит, представленных кривыми B, C и M или кривыми L, J, N и P . Первый тип охватывает фиксированные точки, в которых частица имеет целое число циклотронных периодов для каждого продольного колебания.

Для дипольной конфигурации Драгт сделал аналогичный расчет; он получил переход от плавных кривых на поверхности сечения (как показано на рис. 5.7) к случаю беспорядочных пересечений поверхности. При этом в качестве параметров он брал $\xi = v_{\perp}^2/v^2$ и нормированную энергию $2E = (32\gamma_1^2)^{-1}$. Результаты показаны на рис. 5.16. Для колебаний около минимального потенциала $2E \simeq \rho^2/R_0^2$, где R_0 , взятый из рис. 5.5, есть радиус силовой линии, около которой частица движется по круговой траектории радиуса ρ . Устойчивые точки (кружки) отделены от неустойчивых (треугольники) четкой прямой линией, заданной приближенно уравнением $2E = 0,012\xi$. Как и ожидалось, область устойчивости увеличивается с ростом отношения ρ/R_0 , так как R_0 — длина, на которой поле изменяется существенно.

Для асимметричных удерживающих полей первой нарушается адиабатическая инвариантность продольного инварианта J . Это нарушение также было исследовано численными методами. Кроме вычисления дрейфовых поверхностей, предполагая, что J — константа, Сиамбис [54] вычислил и продольный инвариант вдоль действительного пути частицы, включая поперечные дрейфовые движения. Он исследовал постоянство J относительно нормированного циклотронного радиуса $\lambda = \rho/R_0$ (здесь R_0 — расстояние между квадрупольными стержнями). Он нашел, как и следовало ожидать, что для малых токов в квадрупольях ($I/B_0R_0 \simeq 0,5$) J сохраняется даже для большого циклотронного радиуса ($\lambda \simeq 0,2$) и приблизительно равен значению J , вычисленному вдоль линии поля. В этой ситуации, соответствующей рис. 5.13 и 5.14 силовые линии: а) достаточно прямолинейны и б) не очень быстро меняются от одной азимутальной плоскости к другой. Поэтому из «а» следует, что дрейф медленный, а если учесть еще и «б», то продольное движение в азимутальной плоскости, вращающейся с дрейфовой скоростью

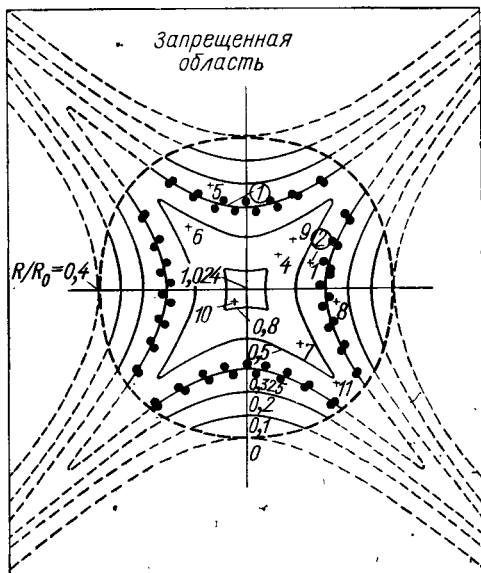


Рис. 5.17. Адиабатические кривые и пересечения траекторий ведущего центра со средней плоскостью; зеркальное квадрупольное поле: $L/R_0=6$, $R_m=1,5$, $I/B_0R_0=2$. $\odot J=0,325$, $\lambda=0,01$, $\mu=1$; $\boxplus J$ не сохраняется, $\lambda=0,05$, $\mu=1$ (относится к точкам, обозначенным знаком +).

для среднего радиуса, почти идентично движению вдоль силовой линии. Однако для больших квадрупольных токов ($I/B_0 R_0 \approx 2$) при $\lambda > 0,02$ J больше не будет интегралом движения. Это и следовало ожидать, так как большие токи приводят как к сильной кривизне силовых линий (большому дрейфу), так и к быстрому их изменению от одной азимутальной плоскости к другой. На рис. 5.17 показаны вычисленные Сиамбисом кривые для полей большой кривизны. Дрейфовые поверхности $J = \text{const}$ показаны в поперечном сечении средней плоскости. Для $J = 0,325$, вычисленного вдоль силовой линии, численные значения J для $\lambda = 0,01$ (на рисунке обозначены кружками) и $\lambda = 0,05$ (крестики) найдены с учетом дрейфового движения. В первом случае J равно постоянной величине и отличается только немного от величины, вычисленной на линии поля. Во втором случае J не является константой и поэтому точки, отмеченные крестиками, больше не располагаются на одной поверхности потока.

Относительные значения ларморовского радиуса ρ , при которых адиабатическая теория несправедлива, находятся в количественном согласии со значениями, которые можно ожидать для трех рассмотренных конфигураций. Для двух симметричных систем отношение ларморовского радиуса к характерной длине, на которой поле заметно меняется, почти идентично нарушению адиабатической теории. При $\rho/L = 1/10$ магнитный момент в симметричной ловушке с магнитными пробками перестает быть постоянным для $v_{\perp}/v < 0,9$. Полагая $(\rho/R_0)^2 = 0,01$ для симметричного диполя, найдем из рис. 5.15 почти такой же результат: переход имеет место при $(v_{\perp}/v)^2 = 0,8$. Для асимметричного удерживающего поля найдем, что для $v_{\perp}/v = 0,9$ ($\mu = 1$ при $V_{\text{макс}}/B_0 = 1,25$) переход к несохраняющемуся J имеет место при много меньшем отношении ρ/R_0 ($0,01 < \rho/R_0 < 0,05$).

§ 5.4. Нагрев плазмы

Введение. Плазма может быть нагрета либо при взаимодействии отдельных частиц с электрическими и магнитными полями, либо при коллективном взаимодействии больших групп частиц с полями. В последнем случае обычно становится существенным собственное поле частиц, в то время как в первом случае собственными полями можно пренебречь.

Нагрев отдельной частицы можно разбить на три типа: а) адиабатический нагрев — все интегралы движения существуют; б) резонансный нагрев — один или более адиабатических инвариантов перестает существовать; в) стохастический нагрев, который зависит также от несохраняющихся адиабатических инвариантов. В принципе для нагрева электронов или ионов могут быть использованы все три метода. Для плазм конечной плотности вследствие диэлектрических свойств плазмы разогревающие поля могут экранироваться от большей части плазменного объема и поэтому нагрев

уменьшается. Это особенно важно для резонансного циклотронного нагрева ионов, в котором частота электронной плазмы, вообще говоря, больше циклотронной частоты ионов. Экранировку частично можно преодолеть нагревом электронов, чтобы увеличивалась глубина проникновения.

Коллективные методы нагрева плазмы используются для преодоления экранирующего эффекта. Имеются два основных метода: а) возбуждения волн в плазме, которые могут быть сделаны затухающими, так что при этом будет происходить передача энергии волны частице; б) возбуждение плазменных неустойчивостей, так что поля нагрева генерируются самой плазмой. В первом методе энергия поступает вместе с внешними полями, как и в методе для нагрева отдельной частицы. Во втором методе энергия поступает за счет отклонения заряженных частиц от изотропного максвелловского распределения, что представляет собой взаимодействие типа пучок—плазма.

В этом параграфе исследуем только взаимодействия полей с отдельными частицами. Всеми эффектами экранировки пренебрежем. Исследование различных аспектов коллективного нагрева читатель может найти в работе [59].

Адиабатическое сжатие. Если магнитное поле в ловушке с магнитными пробками меняется со временем медленно, так что удовлетворяется условие (5.1), то полная энергия частиц изменяется, однако интегралы действия остаются адиабатическими интегралами. Используя адиабатическое постоянство магнитного момента и предполагая, что дрейфом можно пренебречь, получаем, что отношение энергии поперечного движения к энергии магнитного поля должно оставаться постоянным. В точке отражения энергия поперечного движения равна полной энергии, что дает

$$v^2(t)/B_m(t) = v^2(0)/B_m(0) = 2\mu/m, \quad (5.130)$$

а на любой другой плоскости

$$w^2(t)/B(t) = w^2(0)/B(0) = 2\mu/m. \quad (5.131)$$

С учетом закона сохранения энергии имеем

$$v^2 = w^2 + u_{\parallel}^2. \quad (5.132)$$

Подставляя (5.132) в выражение для продольного инварианта (5.13) получаем

$$J = m \oint (v^2 - w^2)^{1/2} ds = \text{const},$$

а выражая v^2 и w^2 из (5.130) и (5.131) через магнитный момент и пробочное отношение $\mathcal{R} = B/B_0$, получаем

$$J = [2m\mu B_0(t)]^{1/2} \oint [\mathcal{R}_m(t) - \mathcal{R}(t, s)]^{1/2} ds = \text{const}. \quad (5.133)$$

Если известно, как изменяется \mathcal{R} от s и t , то (5.133) определит изменение энергии и сжатие. Покажем это на примере. Пусть форма

поля ловушки не меняется при сжатии и приближенно задается так:

$$\mathcal{R}(s, t) = 1 + (s^2/s_B^2), \quad (5.134)$$

где $s_B = \text{const}$, тогда (5.133) примет вид

$$J = [8m\mu B_0(t)]^{1/2} \int_{-s_m}^{s_m} \left[\frac{(s_m^2 - s^2)}{s_B^2} \right]^{1/2} ds = \text{const}.$$

После интегрирования получим

$$[2m\mu B_0(t)]^{1/2} (\pi s_m^2(t)/s_B) = \text{const}$$

или

$$s_m(t)/s_m(0) = [B_0(0)/B_0(t)]^{1/4}. \quad (5.135)$$

Продольное сжатие обратно пропорционально $B_0^{1/4}$, в то время как поперечное сжатие (мы уже это показали) обратно пропорционально B_0 . Плотность обратно пропорциональна сжатию и, следовательно, пропорциональна $B_0^{5/4}$, т. е.

$$n(t)/n(0) = [B_0(t)/B_0(0)]^{5/4}. \quad (5.136)$$

Относительное изменение пробочного отношения можно найти, решив (5.134) относительно s при $s = s_m$ и подставив его из (5.135). Это дает

$$\frac{\mathcal{R}_m(t) - 1}{\mathcal{R}_m(0) - 1} = \left[\frac{B_0(0)}{B_0(t)} \right]^{1/2}. \quad (5.137)$$

Таким образом, из (5.130) можно найти увеличение энергии любой частицы как функцию поля в центре B_0 :

$$\frac{v^2(t)}{v^2(0)} = \frac{\mathcal{R}_m(t) B_0(t)}{\mathcal{R}_m(0) B_0(0)}.$$

Решая (5.137) относительно $\mathcal{R}_m(t)$ и подставляя $\mathcal{R}_m(0) = B_m(0)/B_0(0)$ в полученный результат, имеем

$$\frac{v^2(t)}{v^2(0)} = \frac{B_0(t)}{B_0(0)} \left\{ \left[\frac{B_0(t)}{B_0(0)} \right]^{1/2} + \frac{B_m(0)}{B_0(0)} \left[1 - \left(\frac{B_0(t)}{B_0(0)} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (5.138)$$

Сделаем важное замечание, что сжатия в продольном и поперечном направлениях различны. Расстояние между точками отражения сокращается как $[B_0(0)/B_0(t)]^{1/4}$, а радиус как $(B_0(0)/B_0(t))^{1/2}$. Следовательно, поперечный импульс увеличивается быстрее продольного, вследствие чего первоначально изотропное распределение скоростей перейдет в анизотропное. Это может вызвать неустойчивости в пространстве скоростей. Кроме того, можно увидеть, что соответствующее изменение формы поля ловушки в течение сжатия можно использовать для сохранения изотропного распределения скоростей, если конусы потерь малы.

Циклотронный резонансный нагрев в однородном магнитном поле. В гл. 4 подробно рассмотрен процесс ускорения частиц до высоких энергий при синхронном движении с бегущим полем. Простейший тип такого синхронного ускорения — резонанс между электромагнитной волной с круговой поляризацией с угловой частотой ω и частицей, вращающейся в постоянном магнитном поле с циклотронной частотой $\omega_c = \omega$. Хотя этот простой тип резонансного нагрева обычно не применяется для плазм из-за отсутствия удержания в однородных полях, рассмотрим его с тем, чтобы в следующих разделах исследовать нагрев в зеркальных полях. Нагрев однородными полями может иметь некоторое применение при удержании тороидальными полями или в случае, когда имеются очень высокие ускоряющие поля.

Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях описывается уравнением:

$$\dot{\mathbf{p}} = e(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.139)$$

Рассмотрим сначала нерелятивистское движение. Пренебрегая переменной составляющей магнитных полей и предполагая, что электрическое поле с круговой поляризацией имеет вид

$$\mathcal{E} = x\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) + y\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.140)$$

получаем уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= (e/m)\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) + \omega_c v_y; \\ \dot{v}_y &= (e/m)\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) - \omega_c v_x, \end{aligned} \right\} \quad (5.141)$$

где $\omega_c = eB/m$. Легко найти, что решение этой системы уравнений имеет вид

$$v_x = A \cos(\omega_c t + \psi) + \frac{1}{\omega_c - \omega} \cdot \frac{e}{m} \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.142)$$

выражение для v_y аналогично. Если расписать полную поперечную энергию $mv^2/2 = m(v_x^2 + v_y^2)/2$, то она будет содержать постоянный и осциллирующий члены. Осциллирующий член содержит сумму и разность частот ω и ω_c . Однако из (5.142) следует, что по мере приближения ω к ω_c возникает резонансная раскачка амплитуды осцилляторной энергии и частота колебания стремится к нулю. В этом случае получаем секулярное решение. Для определенности положим начальные условия равными $v_x = 0$ и $v_y = v_0$ при $t = 0$. Тогда секулярное решение примет вид

$$\left. \begin{aligned} v_x &= (e\mathcal{E}_0/m)t \sin(\omega t + \varphi) + v_0 \sin \omega t; \\ v_y &= (e\mathcal{E}_0/m)t \cos(\omega t + \varphi) + v_0 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (5.143)$$

Поперечная кинетическая энергия частицы после возведения в квадрат и сложения компонент скоростей задается выражением

$$\begin{aligned} (1/2)mv^2 &= (1/2)mv_0^2 + (1/2)m(\mathcal{E}_0/B)^2(\omega_c t)^2 + \\ &+ m(\mathcal{E}_0/B)v_0\omega_c t \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Второй и третий члены дают секулярное изменение энергии. Третий член вначале доминирует, приводя тем самым либо к увеличению, либо к уменьшению энергии (это зависит от фазы частицы относительно фазы волны). Затем преобладающим становится второй член, что приводит окончательно к увеличению энергии.

Если включить в рассмотрение релятивистские эффекты, то на прирост энергии будут влиять и изменение массы и присутствие магнитных полей. Для очень высоких энергий прирост энергии будет ограничен радиационным торможением, описанным в § 4.2. Робертс и Бушбаум [48] рассмотрели релятивистскую задачу, но они не учли радиационное торможение. Они нашли, что для поддержания резонанса в случае показателя преломления среды, равного единице, доплеровский сдвиг частоты поля, обусловленный z -компонентой скорости, в точности равен изменению циклотронной частоты из-за релятивистского изменения массы. Однако энергия растет медленнее, примерно как

$$E(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{9}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{B_c} \omega t \right)^{2/3}. \quad (5.145)$$

Для показателя, не равного единице, они нашли, что энергия осциллирует. Эти результаты, полученные для постоянных магнитных полей, имеют ограниченное применение в проблеме удержания.

Циклотронное резонансное взаимодействие в ловушках с магнитными пробками. Результаты теории возмущений. В поле ловушки с магнитными пробками частица совершает продольные колебания, в результате чего она пересекает области с различными напряженностями магнитного поля и, следовательно, может оказаться в резонансе. При этих условиях не очевидно, может ли происходить непрерывный нагрев, а аналитическое решение этой проблемы получить невозможно. Используя гамильтоновский формализм, Зейдель [53] смог оценить приближенно первые интегралы уравнений движения, которые неявно содержали изменение энергии и давали фазовые траектории. Из фазовых траекторий можно получить отклонения энергии. Из результатов следовало, что, за исключением узкой резонансной области очень маленьких продольных колебаний, отклонения энергии ограничены и существует стабильный продолжительный период колебания энергии, которому в фазовом пространстве соответствует замкнутая кривая. Решение является приближенным. Оно было проверено Тумой и Лихтенбергом [66] численным интегрированием уравнений движения. Оказалось, что результаты находятся в хорошем согласии. Методы и результаты Зейделя приведены в этом разделе. Далее будет дана проверка этой работы и численно оценены границы адиабатического поведения.

Мы получили приближенные решения для движения частицы в зеркальных полях, обладающих круговой симметрией. Метод включал преобразование гамильтониана движения к набору переменных,

в которых гамильтониан циклический по координатам. Следовательно, соответствующие импульсы являются интегралами движения и движение описывается через них. Решение естественным образом выражается через переменные угол—действие, пропорциональные магнитному моменту, продольному действию и потоку, пронизывающему дрейфовую орбиту. Если теперь добавить высокочастотное поле, например моду TE_{0m} , то векторный потенциал можно записать в виде

$$A_{\varphi} = [\mathcal{E}_0(r)/\omega] \cos kz \sin \omega t. \quad (5.146)$$

Прибавляя этот векторный потенциал к гамильтониану (5.106) и подставляя значение постоянного векторного потенциала, полученное для магнитного поля (5.114), имеем

$$H = \frac{1}{2m} \left[\frac{P_{\xi}^2}{h^2 \xi} + \left(\frac{P_{\theta} - \frac{1}{2} e B_0 \xi^2 + \frac{e \mathcal{E}_0}{\omega} \cos(kz) \sin(\omega t)}{r} \right) + \frac{P_{\xi}^2}{h^2 \xi} \right]. \quad (5.147)$$

После преобразования к переменным угол—действие получаем

$$H = H_0 + \varepsilon H_2, \quad (5.148)$$

где H_0 определяется выражением (5.119), $\varepsilon = 2^{1/2} \mathcal{E}_0/\omega B_0 L$ — параметр разложения и

$$H_2 = P_1^{1/2} \cos \left(\omega_1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \sin 2\omega_3 \right) \cos(k\eta_m \sin 2\omega_3) \sin(\omega t).$$

Рассмотрим решения в окрестности резонанса $\omega_1 = \omega t$. Если взять разность

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega t, \quad (5.149)$$

то получим, что координата изменяется со временем медленно. Возмущение H_2 можно разложить в ряд Фурье по продольной переменной ω_3 . Разлагая и усредняя по продольному периоду, Зейдель получил следующие результаты*. В первом порядке по ε возмущающий гамильтониан H_2 может быть заменен его средним $\langle H_2 \rangle_{\omega_3}$ и P_1 заменен $\langle P_1 \rangle_{\omega_3}$, после чего гамильтониан приобретает вид

$$H = \frac{H_0}{\omega_c} - \frac{\omega}{\omega_c} \langle P_1 \rangle_{\omega_3} - \varepsilon \langle H_2 \rangle_{\omega_3} = \text{const}, \quad (5.150)$$

который сводится к

$$H = \langle P_1 \rangle_{\omega_3}^{1/2} \left[\frac{\langle P_1 \rangle_{\omega_3}}{\gamma_1 P_3} \left(\gamma_0 - \frac{\omega}{\omega_c} \right) + 1 + \frac{\varepsilon}{2\gamma_1 P_3} f(\langle P_1 \rangle_{\omega_3}, P_3) \sin \omega_1 \right], \quad (5.151)$$

где

$$f(\langle P_1 \rangle_{\omega_3}, P_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{2l} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \right) J_{4l}(k\eta_m). \quad (5.152)$$

* См. Дополнение.

Здесь J_{nl} — функция Бесселя первого рода. Из (5.151) видим, что H больше не будет независимым от ω_1 и, следовательно, $\langle P_1 \rangle_{\omega}$, не будет интегралом движения. Гамильтониан (5.150) определяет новый интеграл движения, так что $\langle P_1 \rangle_{\omega}$, изменяется в течение некоторого отрезка времени, значительно большего времени усреднения, тем самым определяя в $(\langle P_1 \rangle, \bar{\omega}_1)$ -пространстве (индекс ω_3 для удобства опущен) кривые, не зависящие от времени. При некоторых значениях параметров кривые замкнуты и представляют осцилляторное движение.

Исследуем теперь изменения $\langle P_1 \rangle$ в зависимости от $\bar{\omega}_1$ для двух случаев.

1. Если P_3 очень мало, то частицы движутся в практически однородном поле с циклотронной частотой, которая при $P_3 \rightarrow 0$ равна $\gamma_0 \omega_c$. Если положить в выражении (5.151) $\omega = \gamma_0 \omega_c$, то первый член гамильтониана станет равным нулю, и мы ожидаем сильную зависимость $\langle P_1 \rangle$ от ω_1 , если третий член больше второго или если считать, что $f(\langle P_1 \rangle, P_3) \simeq 1$, $\varepsilon > 2\gamma_1 P_3$. Это приведет к критическому значению \mathcal{E}_0 , если $\bar{\omega}_1$ будет сильно влиять на $\langle P_1 \rangle$. Выбрав достаточно большое значение ε , Зейдель вычислил фазовую траекторию (рис. 5.18). Может иметь место резонансное увеличение $\langle P_1 \rangle$. Оно аналогично резонансному увеличению энергии при циклотронном резонансе в постоянном поле, за исключением того, что здесь требуется минимальное значение ускоряющего поля. Эти две ситуации идентичны в пределе $P_3 = 0$, т. е. в резонансной средней плоскости. Заметим еще, что $\langle P_1 \rangle$ должен иметь минимальные начальные значения, что можно проверить, положив в (5.152) $f(\langle P_1 \rangle, P_3) = 0$. Нули соответствуют тем значениям переменных действия, для которых среднее ускорение в течение одного продольного колебания равно нулю.

2. Для больших P_3 частицы, как правило, не могут захватиться на резонансные орбиты. Однако, если рассмотреть частицы, средняя циклотронная частота которых равна приложенной частоте, для нескольких продольных периодов имеет место приращение энергии, хотя для больших времен энергия осциллирует. Это проиллюстрировано на рис. 5.19 вычислениями Зейделя. Результат напоминает движение частиц в ускорителе (см. § 4.2), в котором на стационарные орбиты захватываются только частицы, движущиеся приблизительно со скоростью волны, тогда как другие либо опережают их, либо отстают. Здесь в условие синхронизма входит вместо скорости волны средняя циклотронная частота.

Численный расчет циклотронного взаимодействия в ловушках с магнитными пробками. Границы адиабатического поведения. Применение гамильтоновского формализма для вычисления влияния циклотронного резонансного нагрева ограничено рядом предположений: 1) возмущающий член в гамильтониане должен быть малым; 2) изменение переменных должно быть малым в течение периода усреднения; 3) уравнения, полученные Зейделем, нерелятивистские.

Чтобы выяснить, насколько существенны эти ограничения, численным методом решены точные уравнения движения для нескольких частных случаев. Результаты проведенных вычислений показывают, что адиабатический инвариант существует даже во внешней обла-

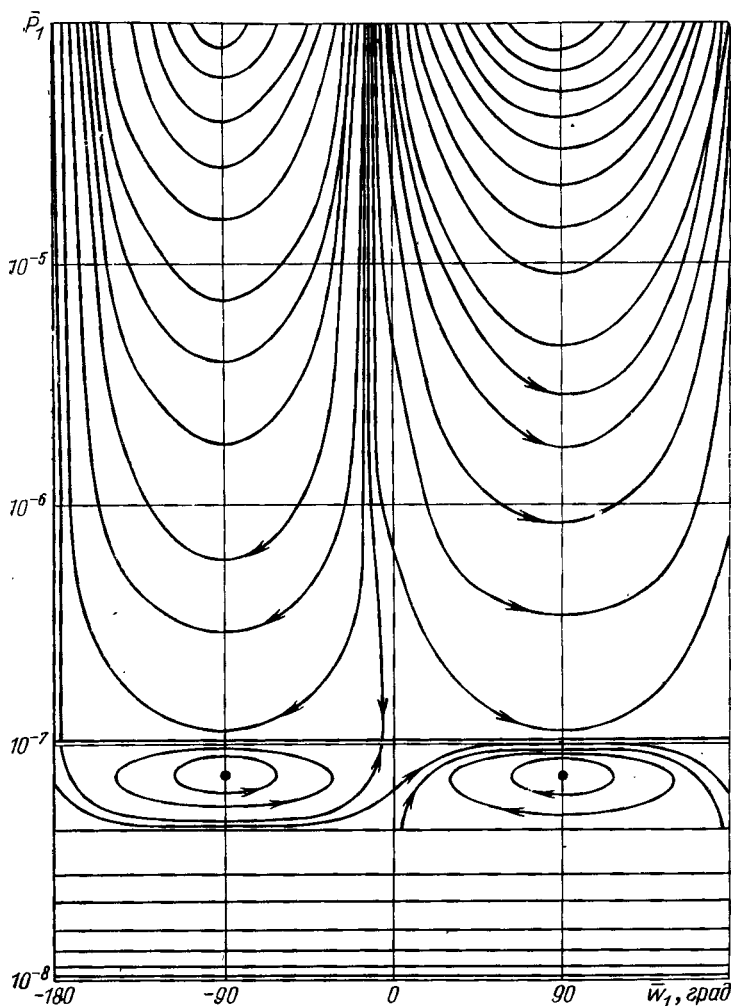


Рис. 5.18. Фазовые траектории в плоскости $(\bar{P}_1, \bar{\omega}_1)$, соответствующие приложенной частоте, которая равна циклотронной частоте в средней плоскости, и при ВЧ поле выше критического ($\gamma_0 \omega_0 = \omega$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $L_s/\lambda = 2$, $P_3 = 10^{-6}$).

сти, в которой, как полагают, теория возмущений верна. Однако для длинных ловушек и больших приращений канонической фазы $\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega t$ существует переход к неадиабатическому поведению.

Этот результат согласуется с поведением частицы в статических полях, как следует из численных расчетов, приведенных в § 3.3.

Релятивистское уравнение движения электрона в электрическом и магнитном полях можно записать следующим образом:

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}; \quad (5.153)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m_0 \gamma} \left[\mathcal{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathcal{E} \cdot \mathbf{v}) \right], \quad (5.154)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Магнитное поле вблизи оси ловушки $r \ll L$ аппроксимируется выражениями

$$\left. \begin{aligned} B_x &= (x/r) (\pi r/L) \alpha B_1 \sin(2\pi z/L); \\ B_y &= -(y/r) (\pi r/L) \alpha B_1 \sin(2\pi z/L); \\ B_z &= B_1 [1 - (1 + (\pi r/L)^2) \alpha \cos(2\pi z/L)], \end{aligned} \right\} \quad (5.155)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$; $\alpha = (\mathcal{R} - 1)/(\mathcal{R}_m + 1)$; \mathcal{R}_m — пробочное отношение; $B_0 = B_1 (1 - \alpha)$ — магнитное поле в средней плоскости

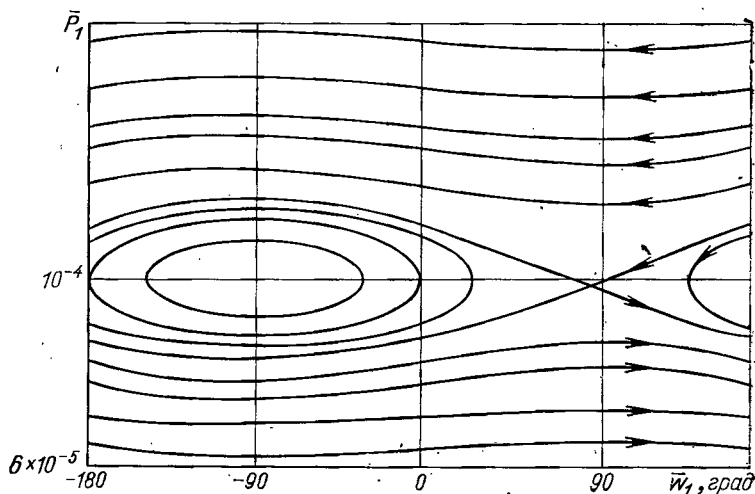


Рис. 5.19. Фазовые траектории в плоскости $P_1, \bar{\omega}_1$, соответствующие прикладываемой частоте, которая на 2% выше, чем циклотронная частота в средней плоскости для низкоэнергетических электронов: $\omega - \gamma_0 \omega_0 = 0,02$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $L_s/\lambda = 2$, $P_3 = 10^{-4}$ [53].

и $z = \pm L/2$ — координаты магнитных пробок. Электромагнитная волна с круговой поляризацией, распространяющаяся вдоль оси z , задается так:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [\cos(\omega t - kz + \varphi) \hat{\mathbf{x}} - \sin(\omega t - kz + \varphi) \hat{\mathbf{y}}]. \quad (5.156)$$

Нужно решить численно шесть уравнений (5.153) и (5.154), чтобы получить движение частицы в различных полях при различных

начальных условиях. Используя (5.116), (5.121) и (5.122), Зейдель вычислил фазовые траектории (см. рис. 5.19), соответствующие следующим параметрам: $\mathcal{M}_m = 3$; $B_0 = 3,6$ кэс; $\omega = 2\pi \cdot 1,02 \cdot 10^{10}$ (т. е. циклотронный резонанс при $1,02 \omega_c$ для $\omega = \nu_1$); $\mathcal{E}_0 = 9,6$ кв/м; $E_{\perp}(0) = 7,77 \cdot 10^3$ эв и $E_{\parallel}(0) = 3,11 \cdot 10^2$ эв. Для магнитного поля (5.155) Зейдель использовал эмпирически подобранную форму магнитного поля с длиной ловушки, равной $L = 0,266$ м. Тума и Лихтенберг [66], используя эти значения (для упрощения аппроксимации они выбрали более короткую ловушку с $L = 0,06$ м), получили численные результаты, представленные на рис. 5.20, а, б. Кинетическая энергия электрона, перпендикулярная скорость электрона и магнитное поле даны в зависимости от входной фазы между ВЧ волной и циклотронной орбитой. На рис. 5.20, а максимальное изменение энергии электрона равно 30%, что совпадает с результатом, вычисленным по методу возмущений. На рис. 5.20, б напряженность электрического поля увеличена на порядок. Осцилляторная природа энергии электрона для случая больших электрических полей четко указывает на существование инварианта вопреки тому, что вычисления в первом приближении теории возмущений перестают быть справедливыми.

На рис. 5.21 дана диаграмма скорость—фаза, аналогичная диаграмме рис. 5.19 для параметров Зейделя. Различные начальные фазы порождают набор кривых постоянного инварианта. Эти результаты также находятся в количественном согласии с вычислениями по теории возмущений и являются гладкими в том смысле, что для данной фазы найдены только два значения скорости, что характеризует существование интеграла движения. Числа вдоль кривых указывают последовательность пересечений области резонанса, при которых вычислялись скорость и фаза. Они несколько отличаются от средних значений, вычисленных по теории возмущений, но так как энергии и фазы осциллируют при удалении от резонанса, разница эта невелика. По форме численные результаты совершенно аналогичны результатам, которые дает теория возмущений, но численные методы применимы в более широком диапазоне значений \overline{P}_1 и $\langle \overline{P}_1 \rangle$. Причина этих расхождений не ясна, но расхождения эти не вызваны использованием поверхности сечения для численных расчетов (см. Дополнение).

Диаграммы на рис. 5.20 и 5.21 соответствуют электронам, не проникающим глубоко в область магнитной пробки. Значение B в области проникновения лишь на 4% больше значения B в средней плоскости. При этом выполняются условия усреднения по продольному движению, которые требуют, чтобы фаза вращения во вращательной системе отсчета $\overline{\omega}_1$, задаваемая (5.125), изменялась медленно в сравнении с продольной фазой. Если это не так, метод усреднения, который приводит к образованию адиабатических инвариантов, использовать нельзя. Из результатов § 2.4 и 5.3 можно ожидать, что в случае глубокого проникновения в пробку инварианты пере-

станут существовать. На рис. 5.22 цифрами показана последовательность области пересечений резонанса для глубокого проникновения в пробку. Этот результат демонстрирует исчезновение инвариантов, так как точки на фазовой плоскости, соответствующие пересечениям

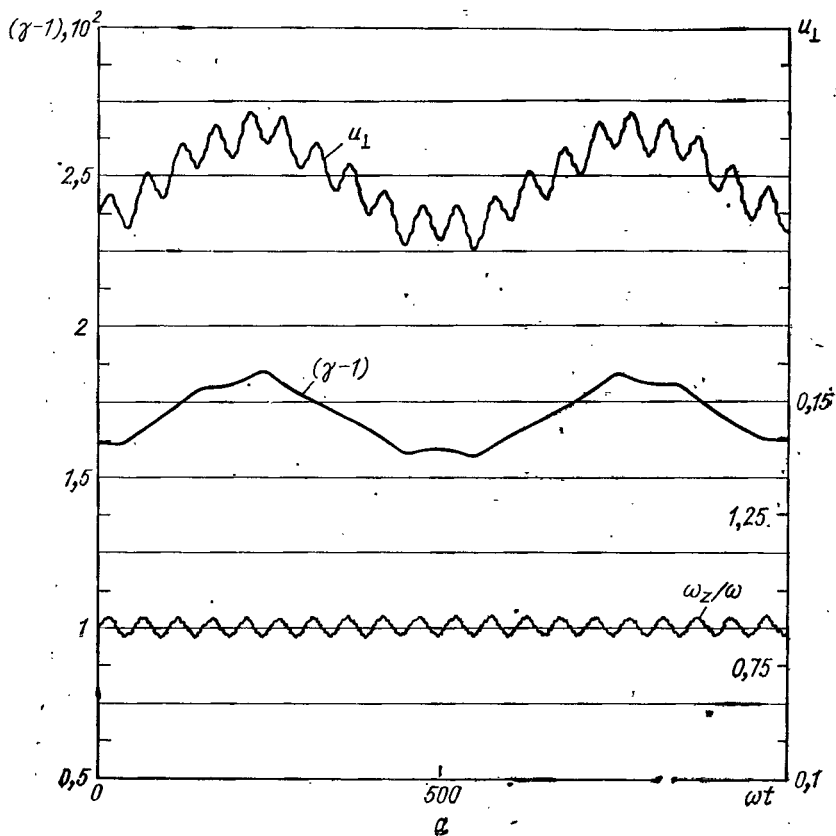
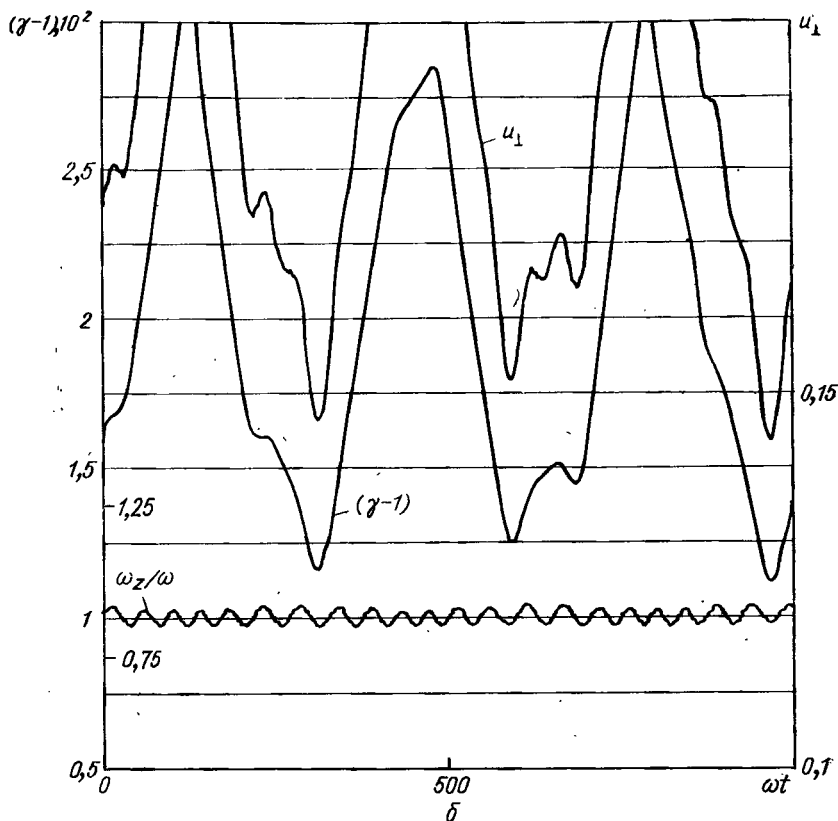


Рис. 5.20. Зависимость от времени нормированной кинетической энергии $\gamma - 1$, нормированной поперечной скорости $u_{\perp} = u_{\perp}/c$ и нормированного магнитного поля ω_z/ω , которое действует на электроны во время движения;

области резонанса, беспорядочно разбросаны. Как и в § 2.4 и 5.3, переход, при котором адиабатические инварианты перестают существовать, может быть определен только численными методами.

Имеется ряд важных выводов относительно перехода от адиабатического поведения к неадиабатическому. Вывод Зейделя о том, что непрерывный циклотронный резонансный нагрев не имеет места в ловушках с магнитными пробками, приложим только к ловушкам с сильно анизотропным распределением частиц по скоростям, которое применяется как в экспериментах с инъекцией нейтралов, так и в экспериментах с пробочным сжатием, следующим после цикла

сжатия. Однако для относительно изотропной инжекции и нагрева в цикле сжатия глубокое проникновение в пробки должно приводить к стохастическому нагреву. Как адиабатическое, так и неадиабатическое поведение было обнаружено экспериментально [39].



время измеряется в периодах ВЧ поля: $\mathcal{R} = 3$, $2L = 12$ см, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 0,19$ см, $\lambda = 3$ см, $u_{x0} = u_{y0} = 0,123$, $u_{z0} = 0,349$, резонанс при 2% от B в средней плоскости; $\mathcal{E}_0 = 96$ в/см (а); $\mathcal{E}_0 = 960$ в/см (б).

В § 5.4 описана теория стохастического нагрева и проведено сравнение выводов теории с экспериментом.

Далее отметим, что при достаточно низких энергиях инжекции частицы могут эффективно захватываться, так как резонансное циклотронное взаимодействие увеличивает поперечную скорость. На рис. 5.23 приведены типичный результат для инжекции при низких энергиях (30 эВ) и резонансный средний путь между средней плоскостью и пробкой. Начальная фаза замедляется, однако, как видно из (5.143), изменение энергии для более длительных времен всегда положительно, что приводит к захвату.

Отметим еще, что время, в течение которого частица находится в резонансной области, почти не зависит от фазы. Если последующее движение можно связать с существованием инварианта, то частицы могут резонансно возвратиться в конус потерь. В случае отсутствия инварианта времена удержания могут быть больше. Эти зависимости рассмотрены подробно в § 5.5.

Стохастический циклотронный резонансный нагрев. Значительные усилия были сделаны для развития теории стохастического ускорения частиц с тем, чтобы объяснить существование высоко-

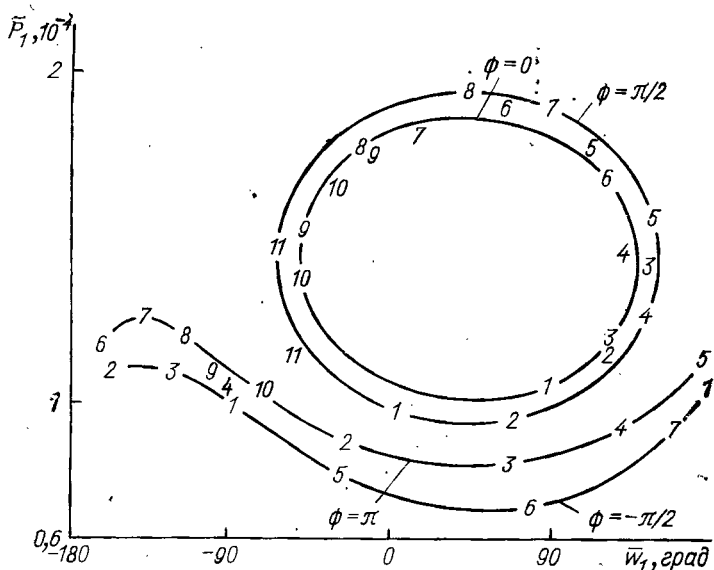


Рис. 5.21. Численный расчет фазовых траекторий, соответствующих траекториям на рис. 5.19.

энергичных частиц в экспериментах пучок—плазма, ударных волнах и солнечных явлениях. Стикс [59] рассмотрел циклотронное ускорение электронов в электрических полях, считая, что вначале поля когерентны, а затем испытывают беспорядочное изменение фазы. Если поля обусловлены коллективными плазменными явлениями, когерентность трудно установить. В другом подходе (Старрок [63]) флуктуации электрических полей рассматриваются как стационарный случайный процесс, который можно описать корреляционными функциями второго порядка. Исследование становится более сложным, но корреляционные функции можно вычислить из квазилинейной теории. Более просто дело обстоит, если стохастические поля прикладываются извне [47].

Отметим, что процесс нагрева (диффузия в пространстве скоростей) может также приводить к диффузии в конфигурационном пространстве. Для удерживаемых ловушкой частиц, если время

флуктуации ненамного больше периода осцилляции по данной степени свободы, флуктуации будут приводить к неадиабатическому поведению по этой степени свободы. Например, Бирмингем и др. [5] подробно развили теорию диффузии, возникающую из-за нарушения третьего адиабатического инварианта. Старрок и Холл [64]

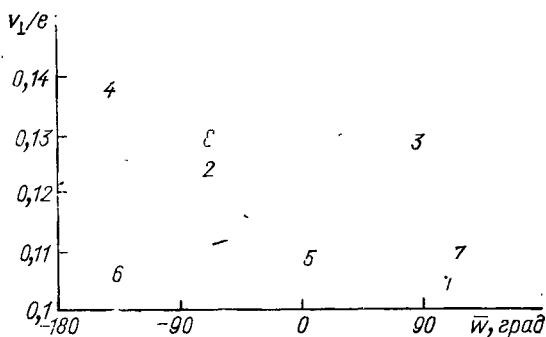


Рис. 5.22. Иллюстрация разрушения адиабатического инварианта для глубокого проникновения частиц в магнитную пробку.

рассмотрели диффузию частиц в пространстве скоростей при наличии стохастических полей.

Мы предполагаем, что стохастическая природа полей зависит от случайности высокочастотной фазы по отношению к орбитальной фазе в резонансной области. В предыдущем разделе мы видели,

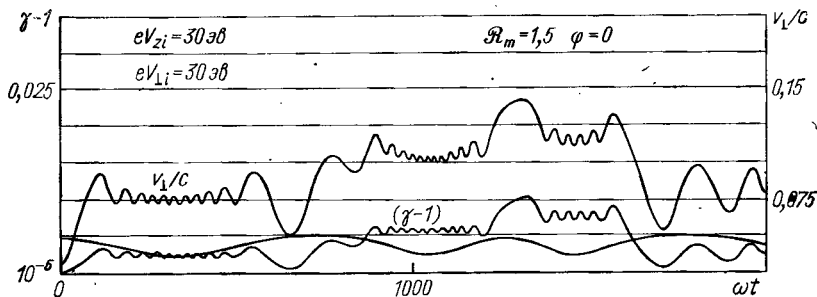


Рис. 5.23. Неадиабатический захват и нагрев (с помощью ВЧ поля) частиц, инжектированных в ловушку с магнитными пробками.

что время нахождения в резонансной области не зависело от фазы. Поэтому может быть применен метод, аналогичный методу Стикса. Диффузией в конфигурационном пространстве пренебрежем.

Будем считать, что при возвращении в резонансную область электроны имеют случайную фазу по отношению к электрическому полю и поперечная скорость достаточно большая, так что резонанс-

ное изменение энергии [см. (5.144)] зависит только от члена, содержащего фазу. При их предположениях имеем

$$\Delta E_{\perp} = E_{\perp n+1} - E_{\perp n} = m \frac{\mathcal{E}_0}{B} \left(\frac{2E_{\perp n}}{m} \right)^{1/2} \omega_c T \cos \varphi, \quad (5.157)$$

где как $E_{\perp n}$ (поперечная энергия при входе в резонансную область), так и φ — независимые случайные переменные. Число эффективных орбит внутри резонансной области $\omega_c T$ считается постоянным, как и предполагалось в численном расчете. Уравнение (5.157) описывает марковский процесс, так как каждое последующее значение E_{\perp} зависит только от предыдущего. Для этого случая было показано [67], что в пределе малых изменений энергии ($\Delta E_{\perp} \ll E_{\perp}$) для каждого перехода распределение вероятности $f(E_{\perp})$ описывается уравнением Фоккера—Планка

$$\frac{\partial}{\partial n} f(E_{\perp}) = \frac{\partial}{\partial E} [A(E_{\perp}) f(E_{\perp})] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} [B(E_{\perp}) f(E_{\perp})], \quad (5.158)$$

где $A(E_{\perp})$ и $B(E_{\perp})$ — первый и второй моменты изменения энергии, т. е.

$$\left. \begin{aligned} A(E_{\perp}) &= \int \langle \Delta E_{\perp} \rangle_{\varphi} f(E_{\perp}) dE_{\perp}; \\ B(E_{\perp}) &= \int \langle (\Delta E_{\perp})^2 \rangle_{\varphi} f(E_{\perp}) dE_{\perp} \end{aligned} \right\} \quad (5.159)$$

и $\langle \rangle_{\varphi}$ — усредненная по фазе величина. Положим, что распределение $f(E_{\perp})$ — гауссово:

$$f(E_{\perp}) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{2}{\langle E_{\perp}^2 \rangle_{E_{\perp}}^{1/2}} \exp \left(- \frac{E_{\perp}^2}{2 \langle E_{\perp}^2 \rangle_{E_{\perp}}} \right), \quad (5.160)$$

где

$$\langle E_{\perp}^2 \rangle_{E_{\perp}} = \int E_{\perp}^2 f(E_{\perp}) dE_{\perp}.$$

Покажем, что при этих предположениях можно вычислить $A(E_{\perp})$ и $B(E_{\perp})$, которые совместно с $f(E_{\perp})$ удовлетворяют уравнению Фоккера—Планка, а первый и второй моменты изменения энергии даются для $\Delta E_{\perp} \ll E_{\perp}$ выражениями

$$\left. \begin{aligned} \langle E_{\perp n+1} \rangle_{\varphi, E_{\perp}} - \langle E_{\perp n} \rangle_{\varphi, E_{\perp}} &= \langle \Delta E_{\perp} \rangle_{\varphi, E_{\perp}}; \\ \langle (E_{\perp n+1})^2 \rangle_{\varphi, E_{\perp}} - \langle E_{\perp n}^2 \rangle_{\varphi, E_{\perp}} &= \langle (\Delta E_{\perp})^2 \rangle_{\varphi, E_{\perp}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.161)$$

Поскольку E_{\perp} и φ — независимые случайные переменные, то $\langle E_{\perp} \rangle_{\varphi, E_{\perp}} = \langle E_{\perp} \rangle_{E_{\perp}}$ и $\langle E_{\perp} \cos \varphi \rangle_{\varphi, E_{\perp}} = \langle E_{\perp} \rangle_{E_{\perp}} \langle \cos \varphi \rangle_{\varphi}$. Усредняя по всем значениям φ , находим, что изменение среднего значения равно нулю, в то время как для изменения второго момента приближенно имеем:

$$\langle (E_{\perp n+1})^2 \rangle_{E_{\perp}} - \langle E_{\perp n}^2 \rangle_{E_{\perp}} = m \left(\frac{\mathcal{E}_0 \omega_c T}{B} \right) \langle E_{\perp n} \rangle_{E_{\perp}}, \quad (5.162)$$

где подставлено значение ΔE_{\perp} из (5.157) и использовано равенство $\langle (\cos \varphi)^2 \rangle_{\varphi} = 1/2$. Заменяя $\langle E_{\perp}^2 \rangle_{E_{\perp}}$ на U и учитывая, что

$$\langle E_{\perp} \rangle_{E_{\perp}} = (2/\pi)^{1/2} \langle E_{\perp}^2 \rangle_{E_{\perp}}^{1/2}, \quad (5.163)$$

для больших n перепишем (5.162) в дифференциальной форме

$$\frac{dU}{dn} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} m \left(\frac{\mathcal{E}_0}{B} \omega_c T \right)^2 U^{1/2}. \quad (5.164)$$

Решение этого уравнения дает стохастический нагрев

$$U^{1/2} = \langle E_{\perp}^2 \rangle_{E_{\perp}}^{1/2} = \frac{m}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{B} \omega_c T \right)^2 n. \quad (5.165)$$

Покажем, что если $\langle E_{\perp}^2 \rangle$ задано уравнением (5.165), а $f(E_{\perp})$ — уравнением (5.160), то уравнение (5.158) удовлетворяется. Из (5.159), (5.160) и (5.162) определяем, что

$$A(E_{\perp}) = 0 \quad (5.166)$$

и

$$B(E_{\perp}) = m \left(\frac{\mathcal{E}_0}{B} \omega_c T \right)^2 \langle E_{\perp n} \rangle_{E_{\perp}}. \quad (5.167)$$

В дальнейшем будем опускать нижний индекс E_{\perp} . Подставляя (5.166) (5.167) и (5.163) в уравнение Фоккера—Планка, имеем

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{2}{\pi^{1/2} \langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2}} \exp \left(- \frac{E_{\perp}}{2 \langle E_{\perp}^2 \rangle} \right) \right] = \frac{1}{2} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial E_{\perp}^2} \left[m \left(\frac{\mathcal{E}_0}{B} \omega_c T \right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \langle E_{\perp}^2 \rangle \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\langle E_{\perp}^2 \rangle} \exp \left(- \frac{E_{\perp}}{2 \langle E_{\perp}^2 \rangle} \right) \right].$$

Предполагая, что $\langle E_{\perp}^2 \rangle = \beta^2 n^2$, выполняя требуемые дифференцирования, определяем β

$$\beta = m / (2\pi)^{1/2} [(\mathcal{E}_0/B) \omega_c T]^2,$$

что согласуется с результатом, вычисленным по формуле (5.165). Итак, предположение о том, что распределение является гауссовым, согласуется с тем, что рассматриваемый процесс — марковский.

E_{\perp} принимает только положительные значения и, следовательно, мы должны предположить, что при $E_{\perp} = 0$ происходит полное отражение, тогда сохраняется форма энергетического распределения [9]. В действительности это не так: отражающий барьер несколько размазан и имеет поглощение. Это в основном влияет на абсолютную плотность, не оказывая заметного воздействия на форму $f(E_{\perp})$. Имеют место следующие неравенства:

$$E_{\perp LC} \ll \Delta E_{\perp i} \ll [E_0 \langle E_{\perp} \rangle]^{1/2} \ll \langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2}, \quad (5.168)$$

где $E_{\perp LC}$ — максимальная поперечная энергия частицы, которая все еще лежит в конусе потерь; $\Delta E_{\perp i}$ — энергия, приобретенная при первом отражении; $[E_0 \langle E_{\perp} \rangle]^{1/2}$ — максимальное изменение энергии частицы при однократном отражении, причем

$$E_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{c_0}{B} \omega_c T \right)^2, \quad (5.169)$$

а $\langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2}$ задано формулой (5.165). Неравенства следуют из предыдущих предположений и результатов.

Сравним полученные результаты, заключающиеся в том, что конечное распределение является гауссовым и имеет дисперсию, определяемую формулой (5.165) с экспериментом, тем самым мы проверим обоснованность предположения о том, что процесс — марковский. В эксперименте со сжатием пробок плазма инжектируется, захватывается с помощью ВЧ поля и нагревается мощным микроволновым импульсом, когда частота микроволны находится в резонансе с магнитным полем внутри ловушки [39]. Зависимость интенсивности тормозного излучения электронов от квадрата энергии в полулогарифмическом масштабе дает прямую линию. Такая прямолинейная зависимость, несомненно, означает, что имеет место предсказанное гауссово распределение в отличие от обычного максвеллова, имеющего место в экспериментах со сжатием. Найдено, что

$$\langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2} \Big|_{B=45 \text{ кэс}} = 100 \text{ кэв}, \quad (5.170)$$

а в предположении адиабатического сжатия при циклотронном резонансе при 3,7 кэс находим

$$\langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2} \Big|_{B=3,7 \text{ кэс}} = 8,2 \text{ кэв}. \quad (5.171)$$

Можно сравнить это значение электронной энергии с теоретическим. Типичное время усреднения между пересечениями области резонанса (см. рис. 5.23) равно $\tau_l = 500/\omega_c$ и для магнитного поля 3,7 кэс $\tau_l \simeq 10^{-8}$ сек. Измеренная эффективная длительность импульса равна $\tau_p \simeq 2 \cdot 10^{-7}$ сек. Это дает приближенное число сечений области резонанса $n = \tau_p/\tau_l \simeq 20$. Подставляя в (5.165) это значение n , величину электрического поля $E = 10^5$ в/м, полученную приближенно из оценки мощности пика, и $\omega_c T \simeq 100$ ($B = 3,7$ кэс), получаем по статистической теории

$$\langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2} \Big|_{B=3,7 \text{ кэс}} \simeq 30 \text{ кэв}. \quad (5.172)$$

Теоретическое значение по сравнению с экспериментальным завышено приблизительно в четыре раза, что, вероятно, можно объяснить следующим: 1) оценка напряженности электрического поля в плазме завышена; 2) эффективное время нахождения в резонансной области уменьшено; 3) реальный процесс отклоняется от идеального марковского.

§ 5.5. Инжекция частиц в удерживающие поля

Общее рассмотрение. Имеются два основных ограничения на захват частиц в удерживающих полях:

1. Для статических полей из закона сохранения энергии следует, что частицы, инжектированные с данной начальной энергией, должны вернуться в начальную точку с равной кинетической энергией и, следовательно, должны выйти из удерживающего магнитного поля.

2. Для любого поля теорема Лиувилля дает верхний предел для числа частиц, которые могут быть инжектированы.

Эти два механизма, как и в случае инжекции в ускоритель (см. § 4.6), взаимосвязаны, если процесс, при котором частицы возвращаются в точки фазового пространства, допускающие возможность утечки частиц, может считаться случайным. Тогда область акцептанса, подходящая для инжекции, сначала заполняется, а последующая инжекция приводит к потере частиц. Конечно, реальная инжекция дополнительных частиц не обязательна для механизма потерь, так как случайность процесса эквивалентна непрерывной виртуальной инжекции.

Более сильное ограничение существует в тех случаях, для которых условия (5.1)

$$\rho \frac{|\nabla B|}{B} \ll 1, \quad \frac{\tau}{B} \cdot \frac{dB}{dt} \ll 1 \quad (5.173)$$

выполняются, т. е. магнитное поле медленно изменяется в пространстве и во времени. При этих условиях магнитный момент $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ является интегралом движения и, как видно из § 5.3, частицы, входящие в поле ловушки, покидают ее после одного колебания. Такое короткое время удержания бесполезно и впоследствии были предложены различные схемы для введения неадиабатических изменений магнитного поля, приводящие к изменению магнитного момента. Например, малое колебание магнитного поля в форме

$$B = B_0 [1 + h \sin(kz)] \quad (5.174)$$

может ввести большие возмущения магнитного момента для частиц с резонансной параллельной составляющей скорости $v_{\parallel} = \omega_c/k$, где $\omega_c = eB_0/m$ — средняя циклотронная частота. Такое возмущение исследовали К. Д. Синельников и др. [56], Лейнг и Робсон [37], Дрейсер и др. [20], Даннет и др. [21]. Возмущение будет также приводить к резонансной потере частиц, однако не так эффективно, как при первом отражении, потому что резонансное взаимодействие энергий между v_{\parallel}^2 и v_{\perp}^2 уводит частицы от резонансной области. Если возмущение спиральное, а не азимутально-симметричное, то частицы, движущиеся в обратном направлении, не являются резонансными. Этот вид инжекции предложил Вингерсон [68], теоретически исследовали Вингерсон, Дупрей и Роуз [69], а эксперименталь-

но — Р. А. Демирханов и др. [17]: Экспериментальные результаты согласуются количественно с теоретическими, но, вообще говоря, они необнадеживающи.

Исходя из фазовых представлений, следует ожидать, что эффективность механизма захвата не является важным критерием при определении времени захвата в стационарном процессе захвата. Время захвата определяется отношением полного подходящего импульсного пространства к импульсному пространству конуса потерь. Более эффективный механизм захвата приводит к более быстрому нарастанию заряда, но возможно, и к более быстрым потерям. Робсон и Тейлор [50], обнаружив этот факт, развили теорию для неадиабатического скачка ведущего поля и показали, используя численные и статистические методы, что время удержания определяется в основном указанным отношением. Помимо метода изменения магнитного момента можно применять методы, изменяющие массовое или зарядовое состояние, например, диссоциация молекулярных ионов [34] или ионизация быстрых нейтралов. Действительно, эти методы наиболее широко используются при инъекции высокоэнергичных ионов в стационарные системы.

Если магнитное поле растет со временем, то, как показано в § 5.3, v_{\perp} в среднем увеличивается быстрее, чем v_{\parallel} . Так, некоторые частицы будут захвачены в возрастающем поле, если они входят в него через вершину конуса потерь. Однако, если адиабатическое условие выполняется, изменение v_{\perp} в течение одного продольного периода мало и поэтому доля захваченных частиц также мала. Так как процесс инъекции в увеличивающееся магнитное поле непременно является неустановившимся, захватывать большие плотности частиц трудно. Если начальное захватывающее поле достаточно мало или скорость увеличения поля достаточно велика, то частицы можно захватывать изменяющимися со временем полями, для которых адиабатическое условие не выполнено. При этом v_{\perp} также может быстро изменяться в течение одного продольного колебания и поэтому эффекты адиабатического и неадиабатического захватов в отдельности четко не различаются. Захват в этой переходной области — основное условие инъекции в экспериментах со сжатием магнитных пробок. Если, например, взять

$$(1/\omega_c B) (dB/dt) = 1/10 \quad (5.175)$$

в качестве критерия для начала неадиабатических эффектов, то можно вычислить значение dB/dt для данного B или, наоборот, значение B при фиксированном dB/dt , которые удовлетворяют критерию, и сравнить их с экспериментальными результатами. В случае экспериментов с «горячими» электронами [46], если $dB/dt = 200$ гс/мксек, то критерий (5.175) выполняется для $B = 10$ гс. При существенно более высоких полях (скажем, на порядок больше) находим, что эффективность захвата действительно уменьшается. Если, наоборот, вычислить время прохождения для электронов

с энергией 10 эв или ионов с энергией 1 кэв , которая характерна для дейтериевых источников, то найдем длину пути 200 см или 50 см соответственно за 1 мксек . Эти расстояния характерны для экспериментальных установок. Сравнивая эти результаты, видим, что адиабатический захват в случае $V = 10 \text{ гс}$ значительно больше захвата при полях, превышающих данное значение на порядок.

В случае захвата горячих ионов [14] для удержания ионов используется начальное ведущее поле величиной порядка 500 гс , это делает необходимым увеличение поля за 1 мксек до величины порядка 10 кгс , чтобы получить неадиабатический захват. Применяемые на практике поля обычно достигают 1 кгс/мксек , следовательно, они не удовлетворяют условию захвата. Эти ионы все же могут быть захвачены адиабатически путем введения дрейфа порядка $1\text{--}2 \text{ м}$. Поле ближайшей к источнику магнитной пробки импульсно увеличивают, прежде чем ионы после отражения от дальней магнитной пробки вернуться в область инжекции.

Методы инжекции с зависящими от времени полями успешно применяются для захвата частиц в полоидальных системах. Для тороидальных систем, по-видимому, лучше использовать стационарные методы инжекции. Стационарные инжекционные механизмы к тому же более подходят для изучения методом фазового пространства. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать стационарные методы. Однако кроме обычных способов стационарной инжекции рассмотрим также стационарные системы, в которые включены поля, зависящие от времени.

Инжекция с помощью неадиабатических полей. Рассмотрим аксиально-симметричное резонансное возмущение, описываемое уравнением (5.174). Тогда гамильтониан движения частицы, заданный выражением (5.105), после подстановки A_ϕ имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \left[\frac{p_\phi + (r^2/2) B_0 (1 + h \sin kz)}{r} \right]^2 + p_z^2 \right], \quad (5.176)$$

где p_ϕ — интеграл движения. Постоянство p_ϕ и H позволяет оценить время и получить только одно дифференциальное уравнение для r . Для довольно искусственного случая, когда частица входит в модулированную область с $r = r_0$ и $dr/dz = 0$ при $z = 0$, Лейнг и Робсон [37], используя численные методы, получили нормированную поперечную энергию $\xi = v_\perp^2/v^2$ как функцию скорости v на входе. Для возмущения $h = 0,05$ и константы возмущений $n = 5$ они получили резонансный захват, изображенный на рис. 5.24. Расчет Лейнга и Робсона вариации захвата с изменением параметров h и n дает более или менее ожидаемый результат. Однако для резонансного захвата возможен обратный процесс, при котором частицы резонансно теряются. Помещая идеально отражающие пробки на расстоянии $L_1/2$ справа и $L_2/2$ слева от области захвата и максимизируя ξ по первым трем прохождениям по отношению к L_1 и L_2 , для частиц, инжесктированных слева направо, Лейнг и Роб-

сон получили вариацию ξ от числа проходов k (рис. 5.25) В этом случае резонансные потери очевидны.

Чтобы выполнить вычисления для большого числа продольных колебаний, Лейнг и Робсон, Даннет и др. [21] ввели предположение о случайности фазы, чтобы аппроксимировать движение снаружи резонансной области. Для упрощения вычислений они аппроксимировали резонансное приращение поля квадратичной функцией. Результаты вычислений показали, что для фиксированного пробоч-

ного отношения $R_m = 10$, вариации n и h сравнительно слабо влияют на среднее время удержания

$$T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{t_0}, \quad (5.177)$$

где t_0 — время одного прохода резонансной области; t_i — полное время прохода резонансной области i -й частицей; N — число моделируемых частиц. Для оптимальных n и h наибольшее

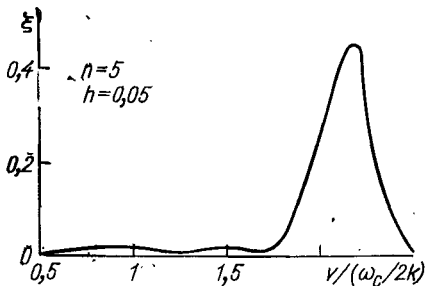


Рис. 5.24. Резонансный захват частицы, полученный Лейнгом и Робсоном [37].

значение $T = 80$, тогда как более характерные значения $T = 30$ или $T = 40$. Более высокие значения обусловлены несколькими долгоживущими частицами, особенно когда R мало. Поскольку наибольший вклад в значение ξ вносится после первого прохождения, то, как и ожидали, инжекция при $\xi \neq 0$ на результаты почти не влияет.

Инжекция при $\xi \neq 0$ делает возможным захват значительной части низкоэнергетического пучка посредством одного неадиабатического скачка. Численные расчеты Даннета и др. [21], Робсона и Тейлора [50] показали, что для малых h и начального значения $\xi_1 = 1/R \xi$ имеет разброс и может лежать как выше, так и ниже ξ_1 после первого прохождения, что приводит к начальному захвату приблизительно половины частиц. Для малых h T меняется обратно пропорционально h , тогда как разброс значений ξ меняется линейно с h . Таким образом, произведение $T \Delta \xi$ постоянно (здесь T — среднее значение T внутри $\Delta \xi$). Этот результат следовало ожидать, исходя из фазовых понятий, так как он означает, что плотность захваченных частиц зависит от плотности эмиттansa пучка, а не от особенностей механизма захвата, и от аксептанса, который связан с пробочным отношением.

Сделанное выше рассмотрение позволяет заключить, что инжекция с малым неадиабатическим изменением магнитного поля является едва ли не лучшей по сравнению с резонансной инжекцией. Тем не менее кратко обсудим и второй тип резонансных систем с постоянным полем и спиральным возмущением: Преимущество спи-

рального возмущения над симметричным состоит в том, что оно дает более эффективный начальный захват. Спиральные системы также исследованы как теоретически, так и практически. Несмотря на кажущуюся простоту одиночного неадиабатического возмущения, такое возмущение практически трудно осуществить, тогда как спиральные возмущения поля, хотя они и трудны для анализа, могут быть легко сконструированы с помощью спиральной обмотки. Поэтому большинство экспериментальных работ выполнено со спиральными системами.

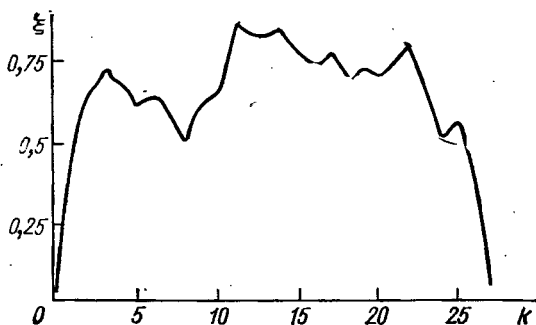


Рис. 5.25. Иллюстрация резонансных потерь, сопровождающих резонансный захват.

Из-за отсутствия азимутальной симметрии для спирального возмущения гамильтоновский формализм теперь практически бесполезен. Вингерсон, Дупрей и Роуз [69] вычислили, что начальный резонансный захват становится существенным для возмущения, в котором

$$rB_0/(LB_{\perp}) \simeq 1, \quad (5.178)$$

где $r = mv/eB_0$; \tilde{B}_{\perp} — поперечная компонента резонансного поля; L — длина резонансной области. Из-за сложности вычислений они считали фазы случайными, а процесс потери частиц — диффузионным. Предположим, что число колебаний до выхода приблизительно обратно пропорционально коэффициенту диффузии (это приближение не принимает в расчет пробочное отношение). Вингерсон и др. нашли, что

$$N \approx L/r. \quad (5.179)$$

Для малых возмущений, например $\tilde{B}/B_0 = 0,02$, из (5.178) $r/L = 0,02$ и из (5.179) $N = 50$. Эти результаты сравнимы с аналогичными результатами для симметричных возмущений.

Экспериментальные результаты различных групп в общем подтверждают предсказания теории. В экспериментах с резонансным захватом Р. А. Демирханова и др. [17] было получено, что спиральное возмущение поля $\tilde{B} \sim 0,25$ гс в приблизительно 100-гауссном

ведущем поле превращало в среднем 40% продольной энергии в поперечную. Длина шага спирали поля $l = 5$ см при полной длине $L = 150$ см. Беря $r = l/\pi$ в качестве среднего резонансного условия, получаем $r/L = 0,01$ и $rB_0/L\tilde{B} = 4$, что согласуется по порядку величины с условием (5.178). Измерения времени захвата показали, что приблизительно 45% частиц попадает в долгоживущую компоненту при числе колебаний $N = 50$, что находится в хорошем соотношении с величиной $N = 100$, полученной по (5.179). Кроме того, найдено, что короткоживущая компонента составляет 20% частиц, захваченных примерно в течение 17 периодов колебаний. Другой существенный результат заключался в том, что средние времена жизни обратно пропорциональны интенсивности захватывающего поля. Этот результат, который следовало ожидать из предыдущего обсуждения, будет обсужден в следующем разделе.

Из результатов, полученных выше, а также из тех, которые будут представлены в следующем разделе, приходим к заключению, что эффективный захват и долгое время удержания взаимно исключают друг друга при возмущении, не зависящем от времени. Однако эти результаты наводят на мысль, что если сделать возмущения пульсирующими до тех пор, пока не будет достигнута стационарная плотность, а затем прекратить пульсации, то таким способом можно получить одновременно и эффективный захват, и длительное удержание. Такое возмущение уже рассмотрено в виде высокочастотного циклотронного резонансного импульса. Из рис. 5.23 видно, что увеличение поперечной энергии дает эффективный захват. Для инжекции при низких энергиях с большим ускоряющим полем все фазы ВЧ поля приводят к захвату. Поэтому импульс ВЧ поля можно оборвать внутри одного продольного колебания. Дополнительное преимущество применения ВЧ поля заключается в результирующем нагреве частиц, что было рассмотрено в § 5.4. Помимо очевидного полезного эффекта образования более горячей плазмы нагрев увеличивает еще и фазовое пространство, доступное для частиц. В следующем разделе проанализируем захват на основе фазовых представлений и покажем, что в противоположность статическому возмущению плотность в конфигурационном пространстве внутри ловушки в процессе инжекции непрерывно увеличивается. Использование такого неадиабатического ВЧ возмущения позволило экспериментально получить эффективный захват в сочетании с длительным удержанием захваченных частиц [39]. Возможно, что такие схемы, использующие квазистационарный механизм захвата, будут многообещающими.

Оценка периода захвата с помощью фазовых представлений.

1. *Статическое возмущение.* В простейшем приближении для получения периода захвата частиц с неадиабатическим статическим возмущением предполагается, что фазовая плотность в ловушке равномерна и скорость инжекции равна скорости потерь. Это приближение, рассмотренное Робсоном и Тейлором, представлено здесь в несколько модифицированном виде. Сначала предположим, что

частицы распределены равномерно в тонком слое в пространстве скоростей в центре магнитной пробки и что входящий пучок может быть представлен с помощью равновесного распределения частиц в конусе потерь, т. е. в ловушку входит столько частиц, сколько ее покидает. Если мы нормируем число частиц в слое на единицу, то число частиц, входящих в конус потерь (в точности равное числу частиц, покидающих последний), назовем его нормированным числом частиц в пучке, равно

$$N_b = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_0} 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (5.180)$$

аналогично число захваченных частиц

$$N_t = 1 - \frac{2}{4\pi} \int_0^{\theta_0} 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (5.181)$$

где θ_0 — угол между скоростью и магнитной осью, при котором частицы полностью отражены, т. е. из (5.92) имеем

$$\sin^2 \theta_0 = 1/\mathcal{R}_m, \quad (5.182)$$

где \mathcal{R}_m — отношение максимума поля в пробке к полю в центральной точке между пробками. Пусть $p(\theta)$ — вероятность того, что частицы пучка будут отклоняться внутрь захватываемой области за один период колебания L/v_{\parallel} , а TL/v — среднее время для частиц, остающихся в ловушке, тогда, приравнявая скорость инъекции к скорости потери, получаем уравнение

$$\frac{v}{L} \int_0^{\theta_0} \frac{dN_b}{d\theta} \cos \theta p(\theta) d\theta = \frac{v}{L} \cdot \frac{N_t}{T}.$$

Подставляя N_b и N_t из (5.180) и (5.181), после выполнения интегрирования в (5.181) получаем

$$\int_0^{\theta_0} \sin \theta \cos \theta p(\theta) d\theta = \frac{\cos \theta_0}{T}. \quad (5.183)$$

Если предположить, что возмущение мало, $p(\theta) = 0$ для $\theta < \theta_0 - \Delta\theta$ и $\Delta\theta \ll 1$, то левую часть выражения (5.183) можно проинтегрировать, считая синус постоянным. Это дает

$$\sin \theta_0 \cos \theta_0 \int_{\theta_0 - \Delta\theta}^{\theta_0} p(\theta) d\theta = \frac{\cos \theta_0}{T}$$

или, обозначив

$$T^* = \frac{T}{\Delta\theta} \int_{\theta_0 - \Delta\theta}^{\theta_0} \rho(\theta) d\theta,$$

получим

$$T^* \Delta\theta = 1/\sin \theta_0 = \mathcal{R}_m^{1/2}. \quad (5.184)$$

Обычно T^* не сильно отличается от T . Можно перейти от $\Delta\theta$ к разбросу по ξ ; обозначим $\xi = v_{\perp}^2/v^2 = \sin^2 \theta$, приращение $\Delta\xi$ равно $\Delta\xi = 2 \sin \theta \cos \theta \Delta\theta$. Заменяя в (5.184) $\Delta\theta$ на $\Delta\xi$,

$$T^* \Delta\xi = 2 \cos \theta_0 = 2(1 - 1/\mathcal{R}_m)^{1/2}. \quad (5.185)$$

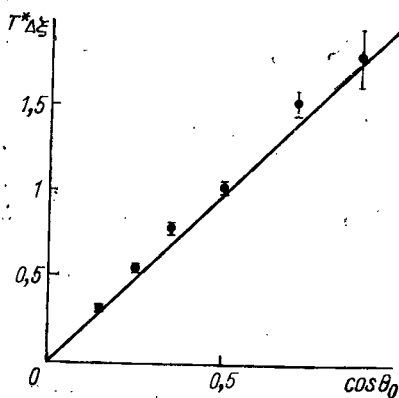


Рис. 5.26. Сравнение периодов захвата, полученных численным и статистическим методами [50].

Отсюда непосредственно следует, что $T^* \Delta\xi$ зависит только от пробочного отношения и не зависит от неадиабатичности ловушки. Таким образом, для данного пробочного отношения среднее время удержания обратно пропорционально степени захвата и для пучка на входе, имеющего однородную плотность по ξ , фактическая плотность захваченного пучка не зависит от эффективности захвата. Численное определение $T^* \Delta\xi$ из расчета орбит, выполненное Робсоном и Тейлором, согласуется с результатом (5.185) и представлено на рис. 5.26.

Сделанное выше исследование содержит ряд упрощающих предположений:

1) фазы равномерно распределены, что, вообще говоря, несправедливо для всех отрезков времени;

2) вводимый пучок заполняет аксептансный конус, что также несправедливо (на самом деле аксептансный конус никогда не заполняется полностью и плотность внутри ловушки может быть ниже);

3) потери приводят к стационарному равновесию, распределенному равномерно в конусе потерь. Чтобы получить фактическое распределение, надо решить уравнение диффузии. Этот более сложный подход развит Вингерсоном и др. (1964 г.).

Из этих трех основных упрощений третье, вообще говоря, не существенно, а второе может быть учтено для специфического входного пучка. От первого предположения о случайности фаз избавиться не так легко. Мы знаем из § 5.3, где рассматривался ВЧ нагрев,

что для продольного колебания, которое содержит только несколько вращательных периодов, фазы не будут случайными. Для более длинных продольных периодов предположение о случайности фаз корректно для коротких временных интервалов, а для более длинных временных интервалов может быть несправедливо. Появляющиеся периоды корреляций, вероятно, достаточно длинны, так что предположение о фазовой случайности в численных расчетах оправданно.

2. *Возмущение, изменяющееся со временем.* Для возмущения с не сохраняющейся энергией фазовый аксептанс может непрерывно увеличиваться и, следовательно, равновесная плотность не существует. В § 5.4 уже разработана большая часть теории, необходимой для анализа этой ситуации. Вычислим распад числа частиц, захваченных в одном прохождении, и затем просуммируем по числу прохождений, для которых инжекция продолжается.

Уравнение, описывающее распад для одного прохождения, имеет вид

$$d\eta_j/dn = -\eta_j, \quad (5.186)$$

где η_j — число удерживаемых частиц, остающихся от j -й инжекции; η_{1j} — число частиц этого класса, теряющихся за одно прохождение. Тогда полное число захваченных частиц после n прохождений с непрерывной инжекцией

$$N = \sum_{j=1}^n \eta_j = \int_1^n n(j) dj, \quad (5.187)$$

где мы заменили сумму интегралом для больших n . Для того чтобы решить уравнение (5.186), необходимо получить выражение для η_l , которое можно написать приблизительно в виде

$$\eta_l = \int_{E_{\perp LC}}^{E_0} \eta_f(E_{\perp}) \frac{\Delta\varphi}{2\pi} dE_{\perp}, \quad (5.188)$$

где $\Delta\varphi/2\pi$ — доля ВЧ фаз, которые принимает частица из E_{\perp} в конусе потерь, а пределы интегрирования — значения E_{\perp} , для которых $\Delta\varphi/2\pi$ существует. Пренебрегая вторым членом в (5.188), находим $\Delta\varphi$ из соотношений

$$v_{\perp f}^2 = v_{\perp}^2 + (E_0/B) v_{\perp} \omega_c T \cos \varphi \quad (5.189)$$

и

$$0 < v_{\perp f} < v_{\perp LC}, \quad (5.190)$$

где $v_{\perp LC}$ — максимум v_{\perp} в конусе потерь. После нахождения $\cos \varphi$ из ограничений v_{\perp} в (5.190) и разложения для малых $\Delta\varphi$ получаем

$$\Delta\varphi = \frac{v_{\perp LC}^2}{v_{\perp} (v_0^2 - v_{\perp}^2)^{1/2}} = \frac{E_{\perp LC}}{E_{\perp} (E_0 - E_{\perp})^{1/2}}. \quad (5.191)$$

Поставляя (5.191) и (5.160) в (5.188), получаем

$$\eta_l = \int_{E_{\perp LC}}^{E_0} \frac{\eta}{2^{1/2} \pi^{3/2} \langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2}} \exp\left(-\frac{E_{\perp}^2}{2\langle E_{\perp}^2 \rangle}\right) \frac{E_{\perp LC} dE_{\perp}}{E_{\perp}^{1/2} (E_0 - E_{\perp})^{1/2}}. \quad (5.192)$$

Для больших значений n справедливы неравенства (5.168). Интеграл можно оценить, если пренебречь членами порядка $E_0/\langle E_{\perp}^2 \rangle^{1/2}$ и $E_{\perp LC}/E_0$ в сравнении с единицей. Окончательный результат

$$\eta_l = \frac{\eta E_{\perp LC}}{(2\pi \langle E_{\perp}^2 \rangle)^{1/2}}, \quad (5.193)$$

подстановка (5.193) и (5.165) в (5.186) дает

$$\frac{d\eta}{dn} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{E_{\perp LC} \eta}{E_0 n}, \quad (5.194)$$

где E_0 определено выражением (5.169). Интегрируя (5.194), получаем число инжектированных за один период прохождения частиц, остающихся после n добавочных прохождений резонансной области,

$$\eta = \eta_0 n^{-C}, \quad (5.195)$$

где $C = E_{\perp LC}/2E_0$ и η_0 — число частиц, инжектированных за период одного прохождения. Для непрерывной инжекции полное число захваченных частиц из (5.187) равно

$$N = \frac{\eta}{1-C} (n^{1-C} - 1). \quad (5.196)$$

Для $C \ll 1$, т. е. для случая инжекции частиц низких энергий и больших ВЧ полей, распад в течение одного прохождения медленный, а образование (для непрерывной инжекции) быстрое. Можно также вычислить время удержания частицы. Если измерять удержание половинным временем жизни частиц, инжектированных за одно прохождение, то из (5.194), полагая $\eta/\eta_0 = 1/2$, получаем $n = 2^{1/C}$. Если время однократного прохождения ($n = 1$) есть τ_l , то половинное время удержания

$$\tau = \tau_l 2^{2E_0/E_{\perp LC}}. \quad (5.197)$$

Для нашего примера $E_0/E_{\perp LC} \approx 10$. Таким образом, получаем $\tau \approx 10^8 \tau_l$. Итак, в среднем частицы удерживаются в течение более чем 10^8 прохождений. Из рис. 5.26 находим, что $\omega_c \tau_l \approx 500$ и, следовательно, для 3-сантиметровых волн, которые мы рассматриваем, $\tau_l \approx 10^{-8}$ и $\tau \approx 10^{-2}$. Это больше, чем время распада, полученное в эксперименте в отсутствие нагрева, и, следовательно, если вероятностные решения справедливы при больших периодах времени, можно ожидать медленного изменения времени жизни частицы вследствие применения непрерывного ВЧ нагрева.

Дополнение

Приведем расчет, используя метод усреднения, для движения частицы в ловушке с магнитными пробками при наличии ВЧ поля. Эти результаты сравниваются с гамильтонианом, вычисленным на поверхности сечения.

Из (5.148) возмущенный гамильтониан равен

$$H = H_0 + \varepsilon \left[P_1^{1/2} \cos \left(\omega_1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \sin 2\omega_3 \right) \cos (kL\eta_m \sin 2\omega_3) \sin \omega t \right], \quad (5.Д.1)$$

где $\varepsilon = 2^{1/2} \mathcal{E}_0 / \omega BL$ — параметр разложения [$L = L_s$ в (5.148)]; P и ω — канонические переменные; H_0 — невозмущенный гамильтониан, заданный выражением (5.119); η_m — максимальное отклонение частицы, определенное формулой (5.116). Гамильтониан H_0 не зависит от угловой переменной и является интегралом движения. Величины ω , k и \mathcal{E}_0 — соответственно частота, волновое число и амплитуда возмущающего ВЧ поля. Взяв $\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega t$ и введя новые канонические координаты из производящей функции $S = = (\omega_1 - \omega t) \bar{P}_1 + \omega_2 \bar{P}_2 + \omega_3 \bar{P}_3$, получим

$$\begin{aligned} \bar{H} = H_0 - \frac{\omega}{\omega_c} P_1 - \varepsilon \left[P_1^{1/2} \cos (kL\eta_m \sin 2\omega_3) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{2} \sin \left(\bar{\omega}_1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \sin 2\omega_3 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \left(\omega_1 + 2\omega t - \frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \sin 2\omega_3 \right) \right\} \right]. \quad (5.Д.2) \end{aligned}$$

Здесь черта над координатами опущена, так как они не изменяются при преобразовании, а произведение $\sin \omega t \cos \left(\omega_1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \sin 2\omega_3 \right)$ разложено на сумму и разность. Предположим, что ω_1 близко к ωt , так что $\bar{\omega}_1$ изменяется медленно со временем по сравнению с изменением ωt и ω_3 . Согласно методу усреднения (см. § 1.4 и 2.4), можно усреднить по переменной высокочастотной фазе ωt и фазе продольного движения $\bar{\omega}_3$, чтобы получить гамильтониан, описывающий изменение P_1 и $\bar{\omega}_1$, не зависящий от быстрых изменений в первом порядке по ε . Усредняя по ωt , получаем

$$\begin{aligned} \langle \bar{H} \rangle_{\omega t} = H_0 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \langle P_1 \rangle_{\omega t} - \\ - \varepsilon \left[P_1^{1/2} \cos (kL\eta_m \sin 2\omega_3) \frac{1}{4} \sin \left(\bar{\omega}_1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \sin 2\omega_3 \right) \right]. \quad (5.Д.3) \end{aligned}$$

Используем формулу (5.Д.3) при обсуждении поверхности сечения. Чтобы провести усреднение по ω_3 , разложим H_2 в ряд Фурье по ω_3 . В комплексных обозначениях ряд будет иметь вид

$$\langle H_2 \rangle_{\omega_3} = P_1^{1/2} \left[e^{i\omega_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{1l} e^{il\omega_3} - e^{-i\omega_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{2l} e^{il\omega_3} \right], \quad (5.Д.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{1l} e^{il\omega_3} &= \\ &= -\frac{1}{4i} e^{-(l/4) (P_3/P_1) \sin 2\omega_3} \cos(kL\eta_m \sin 2\omega_3); \\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{2l} e^{il\omega_3} &= \\ &= -\frac{1}{4i} e^{(l/4) (P_3/P_1) \sin 2\omega_3} \cos(kL\eta_m \sin 2\omega_3). \end{aligned} \right\} \quad (5.Д.5)$$

При усреднении по ω_3 остается только член с $l=0$, таким образом, для H_2 получаем выражение

$$\langle H_2 \rangle_{\omega_1, \omega_3} = P_1^{1/2} [e^{i\bar{\omega}_1} h_{10} - e^{-i\bar{\omega}_1} h_{20}], \quad (5.Д.6)$$

где h_{10} и h_{20} взяты из (5.Д.5) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} h_{10} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{1}{4i} \cos(kL\eta_m \sin \theta) e^{-i(1/4) (P_3/P_1) \sin \theta} d\theta; \\ h_{20} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{1}{4i} \cos(kL\eta_m \sin \theta) e^{i(1/4) (P_3/P_1) \sin \theta} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.Д.7)$$

Видим, что $h_{10} = h_{20} = h_0$. Интегралы можно выразить через функции Бесселя

$$h_0 = -\frac{1}{4i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{2m} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \right) J_{2m} \left(\frac{1}{4} kL\eta_m \right). \quad (5.Д.8)$$

Нижний индекс при J во втором члене разложения отличается от вычисленного Зейделем [см. уравнение (5.152)], однако обычно в вычислениях используют только первый член суммы, поэтому выражения одинаковы. Подставляя h_0 в (5.Д.6), имеем

$$\langle H_2 \rangle = -\frac{1}{2} P_1^{1/2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{2m} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \right) J_{2m}(kL\eta_m) \right) \sin \bar{\omega}_1 \quad (5.Д.9)$$

из (5.Д.2)

$$\langle \bar{H} \rangle = H_0 - (\omega/\omega_c) \langle P_1 \rangle - \varepsilon \langle H_2 \rangle \quad (5.Д.10)$$

так же, как и в (5.150). В первом порядке по ε \bar{H} не зависит от ω_2 и ω_3 и, следовательно, P_2 и P_3 остаются интегралами движения.

Остающиеся канонические уравнения можно записать согласно уравнению (5.151) как

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \frac{dP_1}{dt} \right\rangle &= -\frac{\partial \langle \bar{H} \rangle}{\partial \bar{\omega}_1} + o(\varepsilon^2); \\ \left\langle \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} \right\rangle &= -\frac{\partial \langle \bar{H} \rangle}{\partial P_1} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.Д.11)$$

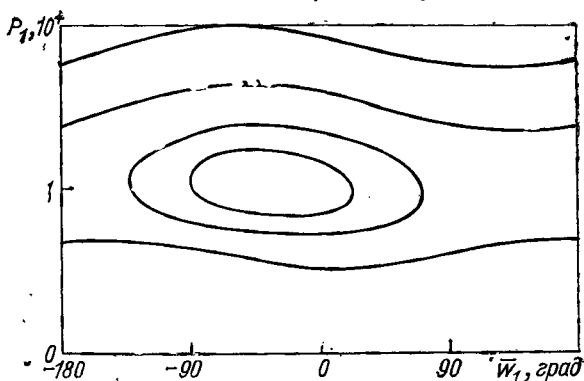


Рис. 5.27. Фазовое движение, вычисленное на поверхности сечения. Параметры соответствуют движению с усредненными переменными, вычисленными по рис. 5.19.

Подставляя выражение для $\langle \bar{H} \rangle$ из (5.Д.10) и (5.Д.9) в уравнения (5.Д.11), получаем

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \frac{dP_1}{dt} \right\rangle &= -\varepsilon \frac{\omega}{2} \langle P_1 \rangle^{1/2} f(\langle P_1 \rangle, P_3) \cos \bar{\omega}_1; \\ \left\langle \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} \right\rangle &= \nu_1 - \omega + \varepsilon_2 \frac{\omega_0}{2\langle P_1 \rangle^{1/2}} \left(\frac{1}{2} f + \langle P_1 \rangle \frac{\partial f}{\partial \langle P_1 \rangle} \right) \sin \bar{\omega}_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.Д.12)$$

где

$$f(\langle P_1 \rangle, P_3) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{2l} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{P_3}{P_1} \right) J_{2l}(kL\eta_m). \quad (5.Д.13)$$

В первом порядке по ε нет необходимости в функции f делать различие между P_1 и $\langle P_1 \rangle$. В этом приближении гамильтониан $\langle \bar{H} \rangle$ не зависит от времени и можно положить его равным константе

$$H_0 - (\omega/\omega_c) \langle P_1 \rangle - \varepsilon \langle H_2 \rangle = \text{const}. \quad (5.Д.14)$$

Таким образом, можно построить в фазовом пространстве кривые $\langle \bar{H}(\langle P_1 \rangle, \bar{\omega}_1) \rangle = \text{const}$, где константа зависит от начальных условий. Эти кривые представлены на рис. 5.19.

Другой способ усреднения по ω_3 состоит в том, чтобы выбрать фиксированное ω_3 и исследовать фазовую плоскость при последовательных сечениях $\omega_3 = \text{const}$. Этот метод полезен для численного определения существования инвариантов и был использован в § 2.4, 5.3 и 5.4. Здесь же мы, предположив адиабатическую инвариантность, покажем, что можно построить диаграмму $P_1 - \bar{\omega}_1$ на поверхности сечения, которая даст почти те же величины, что и после усреднения. Начнем с формулы (5.Д.3), подставляя соответствующие константы для $\langle \bar{H} \rangle_{\omega t}$ и резонансные значения ω_3 [$\sin 2\omega_3 = (-1)^n$ для невозмущенной системы]. После этих подстановок (5.Д.3) примет вид

$$P_1 + (P_1)^{1/2} P_3 - (\omega/\omega_c) P_1 + \varepsilon (P_1^{1/2}/2) \cos(kL\eta_m (-1)^n) \times \\ \times \sin[\bar{\omega}_1 - (1/4)(P_3/P_1)(-1)^n] = \text{const.} \quad (5.Д.15)$$

Выбирая $P_3 = 4 \cdot 10^{-4}$, как на рис. 5.19, и константы, соответствующие различным начальным условиям, для нечетных n получим рис. 5.27. Две фазовые диаграммы аналогичны, за исключением наблюдаемого сдвига нуля ω относительно равновесного положения. Выберем n четным, т. е. частицы входят в фазовую плоскость с противоположной скоростью, и получим снова сдвиг нуля $\bar{\omega}_1$. Отметим, что данные рис. 5.19 и 5.27 несколько отличаются от численных результатов, представленных на рис. 5.21. Одна из причин состоит в том, что P_3 не является точным интегралом, как предполагалось в теоретическом описании. Если фактические значения P_3 , полученные в численном расчете, подставить в (5.Д.3), то вычисления покажут, что поверхность сечения $\langle \bar{H} \rangle_{\omega t} = \text{const}$, что требуется для существования инвариантов.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — постоянная интегрирования, связанная с фазовым интегралом; большая ось эллипса
 b — постоянная интегрирования, связанная с фазовым интегралом; малая ось эллипса
 b — нижний индекс, обозначающий бетатронные колебания
 c — скорость света
 d — расстояние
 e — электронный заряд
 e — нижний индекс, соответствующий огибающей пучка
 f — фокусное расстояние; плотность фазового пространства
 f — нижний индекс — конечное значение величины
 h — номер гармоники
 i — нижний индекс — начальное значение величины; индекс суммирования
 j — нижний индекс, относящийся к j -й частице
 k^2 — возвращающая постоянная в уравнении второго порядка
 l — длина
 l — постоянная углового момента
 m — масса
 m_0 — масса покоя
 m_p — релятивистская масса
 m_l — продольная масса
 n — число частиц, число степеней свободы; показатель поля в ускорителе
 p — импульсная координата; p_0 — невозмущенный импульс; p_1 — начальное значение p
 q — пространственная координата; q_0 — невозмущенная координата; q_1 — начальное значение q
 r — радиус-вектор
 r — радиус, радиус пучка, синхротронный радиус
 s — кривая в фазовом пространстве; независимая переменная расстояния
 s — нижний индекс, обозначающий синхротронные колебания
 t — время
 u — скорость ведущего центра
 u — нормированная скорость максвелловского распределения
 \hat{u} — единичный вектор
 v — скорость
 v_0 — невозмущенная скорость
 v — объем фазового пространства
 w — скорость вращения
 x — обобщенная переменная или координата
 y — обобщенная переменная или координата
 z — координата, направленная вдоль движения; координата вдоль магнитного поля; вертикальная координата в синхротроне

- A — фазовая площадь; амплитуда функции; постоянная интегрирования
 A_0 — компонента векторного потенциала
 B — напряженность магнитного поля
 \hat{B} — единичный вектор в направлении B
 B — величина поля
 B_0 — поле в средней плоскости ловушки с магнитными пробками
 C — константа
 E — энергия
 \mathcal{E} — напряженность электрического поля, \mathcal{E}_0 — максимальное значение электрического поля
 F — силовая функция; F_1 , F_2 и т. д. — производящие функции для канонического преобразования
 G — инерционная функция
 H — гамильтониан
 I — ток
 J — интеграл действия
 \mathcal{J} — плотность тока
 K — постоянная линзы
 $K(s)$ — возвращающая постоянная в уравнении Хилла
 L — длина
 (M) — матрица преобразования, M — увеличение
 N — число частиц
 P — канонический импульс, инвариантный импульс
 Q_i — силы, которые нельзя вывести из гамильтониана
 R — осевое отношение ρ_{\max}/q_{\max} — для правильного эллипса, радиус, радиус ведущего центра
 \mathcal{R} — пробочное отношение
 S — поверхность
 T — асимптотический обобщенный параметр, период колебания, время удержания
 U — потенциальная часть гамильтониана
 V — потенциал
 V_0 — постоянное напряжение
 V_1 — амплитуда переменного напряжения
 W — характеристическая функция Гамильтона; вронскиан
 X — параметр группирования; импедансный параметр эллипса
 Z — импедансный параметр эллипса
 α — коэффициент импульсного уплотнения; параметр асимметрии эллипса; инкремент затухания
 β — осцилляторная и амплитудная функция осциллятора, изменяющегося со временем; отношение v/c ; параметр эллипса
 γ — релятивистский фактор
 δ — инкремент величины
 Δ — отклонение от равновесной фазы; малое приращение величины
 ϵ — связано с фазовой площадью выражением $\epsilon = A/\pi$
 ϵ — малая величина
 η — координата вдоль силовой линии; выход (эффективность)
 θ — угловая переменная
 κ — постоянная пропорциональности
 λ — длина волны; медленно изменяющийся параметр (гл. 2); собственное значение; угол
 ν — частота
 μ — магнитный момент и адиабатический инвариант
 Π — произведение
 ξ — координата, перпендикулярная к силовой линии; нормированная поперечная скорость
 ρ — плотность заряда; радиус

- σ — среднеквадратичное отклонение гауссова распределения; сдвиг фазы
- τ — плотность в фазовом пространстве; нормированное время; время затухания
- Φ — каноническая угловая переменная
- φ — фаза
- Φ_0 — равновесная или невозмущенная фаза
- Φ — потоковый инвариант; нормированная угловая переменная
- Ψ — фазовая переменная; угол в цилиндрических координатах
- ω — ВЧ-частота; частота колебаний (гл. 2)
- ω_0 — частота колебаний
- ω_c — циклотронная частота
- ω_l — ларморовская частота
- ξ — радиус-вектор в фазовом пространстве
- $\langle \rangle$ — среднее значение
- \parallel, \perp — нижние индексы, обозначающие соответственно продольную и поперечную компоненты

К главе 1

1. Ames J. S., Murphagan F. D. *Theoretical Mechanics*. N. Y., Dover, 1957.
2. Bellman R. *Perturbation Techniques in Math. and Physics*. N. Y., Holt, Rinehart and Winston, 1964.
3. Birkhoff G. D. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**, 219 (1908).
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
5. Boltzmann L. *Wiener Ber.*, **66**, 275 (1872).
6. Brillouin L. *Compt. Rend.*, **183**, 24 (1927).
7. Бриллюэн Л. Распространение волн в периодических структурах. Перев. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. DeVoer J., Uhlenbeck G. E. *Studies in Statistical Mechanics*. Amsterdam, North-Holland, 1962.
9. Gartenhaus S. *Elements of Plasma Physics*. N. Y., Holt, Rinehart and Winston, 1964.
10. Голдстейн Г. Классическая механика. Перев. с англ. М., Гостехиздат, 1957.
11. Green G. *Camb. Phil. Trans.*, **6**, 457 (1837).
12. Kirkwood J. C. *J. Chem. Phys.*, **14**, 180 (1946).
13. Kramers H. A. Z. *Physik*, **39**, 828 (1926).
14. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики. М., Гостехтеоретиздат, 1934.
15. Kulsrud R. M. *Phys. Rev.*, **106**, 205 (1957).
16. Liouville I. L. *Math. Pures Appl.*, **2**, 16 (1837).
17. Mills R. L., Sessler A. M. In: *Liouville's Theorem for a Continuous Medium with Conservative Interactions*. Report MURA, 1958, p. 433.
18. Мипорский Н. *Nonlinear Oscillations*. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1962.
19. Поинсгарé Н. *Les Methods Nouvelles de la Mechanique Celeste*. Paris. Gauthier-Villars (1892).
20. Rostoker N., Rosenbluth M. N. *Phys. Fluids*, **5**, 322 (1960).
21. Stoker J. J. *Nonlinear Vibrations*. N. Y., Interscience, 1950.
22. Wentzel G. Z. *Phys.*, **38**, 518 (1926).
23. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. Перев. с англ. М., ОНТИ, 1937.

К главе 2

1. Backus von G., Leonard A., Kulsrud R. Z. *Naturforsch.*, **15A**, 1007 (1960).
2. Birkhoff G. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**, 219 (1908).
3. Бриллюэн Л. Распространение волн в периодических структурах. Перев. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. Burgers J. M. *Ann. Phys. (Paris)*, **52**, 195 (1917).

5. Burren J. W., Morgan D., Walkenshaw W. Production of High Density Proton Currents. Report AERE T/R 2519 (1958).
6. Chandrasekhar S. Plasma Physics. Chap. 3. Chicago, University of Chicago Press, 1960.
7. Courant E. D., Snyder H. S. Ann. Phys., **3**, 1 (1958).
8. De Vogelaere R. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. Ed. by S. Lefschetz. Vol. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1958, p. 53.
9. Dragt A. J. Rev. Geophysics, **3**, 255 (1965).
10. Gardner G. S. Phys. Rev., **115**, 791 (1959).
11. Henon M., Heiles C. Astr. J., **69**, 73 (1964).
12. Hertweck F., Schlüter A. Z. Naturforsch., **12a**, 844 (1957).
13. Kruskal M. J. Math. Phys., **3**, 806 (1962).
14. Kulsrud R. M. Phys., Rev., **106**, 205 (1957).
15. Leonard A. Ann. Phys., **6**, 261 (1959).
16. Lewis H. R. Jr. Phys. Rev., Lett., **18**, 510 (1967).
17. Lichtenberg A. J. The Application of Phase Space Concepts to Particle Dynamics in Accelerators. Ph. D. Thesis. Oxford, Oxford University, 1961.
18. Lichtenberg A. J. Plasma Phys. (J. Nucl. Energy Pt. C), **6**, 135 (1964).
19. McNameara B., Whiteman K. J. Invariants of Nearly Periodic Hamiltonian Systems. UKAEA Report CLM-P111, 1966.
20. McNameara B., Whiteman K. J. Math. Phys., **8**, 2029 (1967).
21. Moser J. In: La Salle and Lefschetz. Int. Symp. Nonlinear Diff. Eq. Nonlinear Mechanics. N. Y., Academic, 1963, p. 71.
22. Moser J. SIAM Rev., **8**, 146 (1966).
23. Нордроп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц. Перев. с англ. Под ред. Н. Н. Семашко. М., Атомиздат, 1967.
24. Northrop T. G., Liu C. S., Kruskal M. D. Phys. Fluids, **9**, 1503 (1966).
25. Parker L. Nuovo Cimento, **40B**, 99 (1965).
26. Стэррок П. Статистическая и динамическая электронная оптика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
27. Сумоп К. R. An Adiabatic Theorem for Motions which Exhibit Invariant Phase Curves. Report MURA KR 5-3 (1954).
28. Тамор С. J. Nucl. Energy Pt. C, **1**, 199 (1960).
29. V andervoort P. O. Ann. Phys., **12**, 436 (1961).
30. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. Перев. с англ. М., ОНТИ, 1937.
31. Yourgrau W., Mandelstam S. Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory. 2nd Ed., Pitman, 1960.

К главе 3

1. Coleman P. D. J. Appl. Phys., **28**, 927 (1957).
2. Courant E. D., Livingston M. S., Snyder H. S. Phys. Rev., **88**, 1190 (1952).
3. Courant E. D., Snyder H. S. Ann. Phys., **3**, 1 (1958).
4. Floquet A. M. G. Ann. Ecole norm. sup. (2), **12**, 47 (1883).
5. Hamilton D. R., Knipp J. K., Kuper J. B. H. Klystrons and Microwave Triodes. N. Y., McGraw-Hill, 1948.
6. Hereward H. G. Energy Spread and Phase Focusing in Particle Accelerators. CERN, PS/HGH/1 (1954).
7. Hereward H. G. The Properties of Particle Beams in Optical Matching Systems in Terms of Phase-Plane Ellipse-Shapes. CERN P. S. Int. TH 59-5 (1959).
8. Hereward H. G., Johnsen K., L'apostolle P. Proc. CERN Symposium on High Energy Physics, **1**, 179 (1956).

9. Herrman G. F. J. Appl. Phys., 29, 127 (1958).
10. Johnson K. The Debuncher. CERN RS/KJ 29 (1955).
11. King N. M. Basic Concepts in the Design of Electrostatic Velocity Separators. NIRL/R/2 (1961).
12. King N. M. Prog. Nucl. Phys., 9, 73 (1962).
13. Langmuir D. B. Proc. IRE, 25, 977 (1937).
14. Lichtenberg A. J. Phase Pre-Bunching. CEA 21 (1957).
15. Lichtenberg A. J. Nucl. Instr. Meth., 26, 243 (1964).
16. Lichtenberg A. J. Appl. Phys., 35, 315 (1964a).
17. Lichtenberg A. J., Robinson K. W. Injection I. CEA 13 (1956).
18. Ливингуд Д. Д. Принцип работы циклических ускорителей. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
19. Neal R. B. A High-Energy Linear Electron Accelerator. Stanford University Microwave Laboratory. TR-ML 140 (1953).
20. Пирс Д. Р. Теория и расчет электронных пучков. М., «Советское радио», 1956.
21. Slater J. C. Rev. Mod. Phys., 20, 473 (1948).
22. S m a r s E. A. In: Prebunching by Velocity Modulation in Linear Accelerators. Stanford U. Microwave Lab. Tech. Rept., 1956, p. 303.
23. Steffan K. G. A. Debunching and Momentum Analyzing Magnet System. CEA, 1958, p. 56.
24. Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. Перев. с нем. М., «Мир», 1969.
25. Taylor R. Acceptance of Axially and Radially Oscillating Particles. AERE-R 3013, 1959.

К главе 4

1. Bohm D., Foldy L. Phys. Rev., 70, 249 (1946).
2. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Перев. с франц. М., Атомиздат, 1970.
3. Christy R. F. Synchrotron Beam Loss due to Quantum Fluctuations Radiation. Cal. Inst. of Tech, Report, 1957.
4. Chu E. L. The Theory of Linear Accelerators. Stanford University Microwave Lab. Tech. Rept., 1951, p. 140.
5. Courant E. D., Livingston M. S., Snyder H. S. Phys. Rev., 88, 1190 (1952).
6. Courant E. D., Snyder H. S. Ann. Phys., 3, 1 (1958).
7. Green G. K., Courant E. D. Handbuch der Physik, 44, 300 (1959).
8. Gittleman B. IEEE Trans. Nuclear Sci., 12, 1033 (1965).
9. Henry J. Phys. Rev., 106, 1057 (1957).
10. Hereward H. G., Johnson K., Lapostolle P. Proc. CERN Symp. High-Energy Accelerators, 1956, p. 179.
11. Kerst D. W., Serber R. Phys. Rev., 60, 53 (1941).
12. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М. Физматгиз, 1966.
13. Lichtenberg A. J. Rev. Sci. Instr., 54, 1196 (1964).
14. Lichtenberg A. J., Robinson K. W. Injection I. CEA 13 (1956).
15. Ливингуд Д. Д. Принцип работы циклических ускорителей. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
16. Livingston M. S., Blewett J. P. Particle Accelerators. N. Y., McGraw-Hill, 1962.
17. McMillan E. M. Phys. Rev., 68, 143 (1945).
18. Motz H. J. Appl. Phys., 22, 527 (1951).
19. Neil V. K., Sessler A. M. Rev. Sci. Instr., 32, 256 (1961).

20. Нильсен К., Сесслер Э. В сб. «Накопление релятивистских частиц». Перев. с англ. Под ред. А. Н. Лебедева. М., Госатомиздат, 1963, стр. 114.
21. Нильсен К., Сесслер Э., Саймон К. Там же, стр. 133.
22. О'Нейп Г. К. Там же, стр. 17.
23. Robinson K. W. Phys. Rev., **111**, 373 (1958).
24. Schwinger J. Phys. Rev., **75**, 1912 (1949).
25. Slater J. C. Rev. Mod. Phys., **20**, 473 (1948).
26. Smars E. A. Electron Orbits in the Buncher of a Linear Accelerator. Stanford University Microwave Lab. Tech. Rept., 252 (1954).
27. Smith L. Orbit Considerations in the Linear Accelerator. Brookhaven National Laboratory LS-3 (1956).
28. Smith L. Handbuch der Physik, **44**, 341 (1959).
29. Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. Перев. с англ. М., «Мир», 1969.
30. Symon K. R. et al. Phys. Rev., **103**, 1837 (1956).
31. Саймон К., Сесслер Э. В сб. «Накопления релятивистских частиц». Перев. с англ. Под ред. А. Н. Лебедева. М., Госатомиздат, 1963, стр. 48.
32. Teng L. C. Study of the Acceptance of the 12.5 Bev Zero Gradient, Proton Synchrotron. ANLAD, Internal, 1956, p. 24.
33. Twiss R. Q., Frank N. H. Rev. Sci. Instr., **20**, 1 (1949).
34. Veksler V. I., J. Phys. USSR, **9**, 153 (1945).

К главе 5

1. Альвен Х. Космическая электродинамика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
2. Berkowitz J. et al. In: Proc. 2nd U. N. Conf. on Peaceful Uses of Atom. Energy, **31**, 171 (1958).
3. Berkowitz J., Gardner C. S. Commun. Pure Appl. Math., **12**, 501 (1959).
4. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Col. Pub., **9** (1927).
5. Birmingham T. J., Northrop T. G., Fälthammar C. G. Phys. Fluids, **10**, 2389 (1967).
6. Bishop A. S., Smith C. G. Phys. Fluids, **9**, 1380 (1966).
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
8. Brinkman H. C. Int. Summer Course in Plasma Physics. Ed. by C.F. Wandel. Risö, 1960, p. 25.
9. Chandrasekhar S. Rev. Mod. Phys., **15**, 1 (1943).
10. Chandrasekhar S. The Plasma in a Magnetic Field. Ed. by R. K.M. Landshof, California, Stanford U. Press, Pale Alto, 1958.
11. Chandrasekhar S., Trehan S. K. Plasma Physics, Chicago. Univ. of Chicago Press, 1960.
12. Chirikov B. V. Plasma Phys. (J.N.E.Pt. C), **1**, 253 (1960).
13. Christofilos N. C. In: Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, **32**, 279 (1958).
14. Coensgen F. H. et al. Nuc. Fus. Supplement. Part. 1, 125 (1962).
15. Courant E. D., Snyder H. S. Ann. Phys., **3**, 1 (1958).
16. De Vogelaere R. Theory of Nonlinear Osc., **4**, 53. Ed. by S. Lefschetz. N. J., Princeton U. Press, Princeton, 1958.
17. Демнрханов Р. А. и др. «Ж. техн. физ.», **9**, 45 (1965).
18. Dory R. A. Plasma Phys. (J.N.E.Pt.C), **8**, 377 (1964).
19. Dragt A. J. Rev. of Geophys., **3**, 255 (1965).
20. Dreicer H. et al. Nuc. Fys. Supplement, Part. 1, 299 (1962).

21. Dunnett D. A. et al. Plasma Phys. (J.N.E.Pt.C), 7, 359 (1965).
22. Fermi E. Astrophys. J., 119, 1 (1954).
23. Furth H. P. (1962), Advanced Plasma Theory. Proc. Int. School of Physics. Course XXV. N. Y. Academic Press, 1964.
24. Gardner C. S. Phys. Rev., 115, 791 (1959).
25. Garren A. et al. In: Proc. 2nd U. N. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, 31, 65 (1958).
26. Голдстейн Г. Классическая механика. Перев. с англ. М., Гостехиздат, 1957.
27. Gott Yu. V. et al. Nuc. Fus. Supp., Pt. III, 1045 (1962).
28. Hastie R. J., Haas F. A., Taylor J. B. Ann. Phys., 41, 302 (1967).
29. Hertweck F., Schlüter A. Z. Naturforsch., 12a, 844 (1957).
30. Kruskal M. D. Proc. 3rd Conf. on Ionized Gases, Venice (1957).
31. Kruskal M. D. P. M. S. 33 (NYO 7903) Project Materhorn, Princeton U., Princeton, N. J. (1958).
32. Kruskal M. D. J. Math. Phys., 9, 806 (1962).
33. Kruskal M. D. et al. In: Proc. 2nd. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, 32, 217 (1958).
34. Kurchatov I. V. Plasma Phys. (J.N.E.Pt. C) (1959).
35. Laciná J. Czech J. Phys., B13, 401 (1963).
36. Laciná J. Plasma Phys. (J.N.E.Pt.C), 8, 515 (1966).
37. Laing E. W., Robson A. E. Plasma Phys. (J.N.E.Pt.C), 3, 146 (1961).
38. Ленерт Б. Динамика заряженных частиц. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1967.
39. Lichtenberg A. J. et al. Bull. Amer. Phys. Soc., 12, No. 5 (1967).
40. Lynden-Bell D. 14th Int. Astrophysical Symp., Liege, Belgium, 1966.
41. Moser J. In: LaSalle and Lefschetz, Int. Symp. Nonlinear Diff. Eq. Nonlinear Mechanics. N. Y., Academic Press, 1963, p. 71.
42. Нортоп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц. Перев. с англ. Под ред. Н. Н. Семашко. М., Атомиздат, 1967.
43. Northrop T. G. et al. Phys. Fluids, 9, 1503 (1966).
44. Northrop T. G., Teller E. Phys. Rev., 117, 215 (1960).
45. Ohkawa T., Kerst D. W. Phys. Rev. Let., 7, 41 (1961).
46. Post R. F. In: Proc. 2nd Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, 32, 245 (1958).
47. Puri S. Phys. Fluids, 9, 1043 and 2043 (1966).
48. Roberts C., Buchsbaum S. Phys. Rev., 135, A381 (1964).
49. Roberts K. V., Berk H. L. Phys. Rev. Let., 19, 297 (1967).
50. Robson A. E., Taylor J. B. Phys. Fluids, 8, 2026 (1965).
51. Rosenbluth M. N., Longmire C. L. Ann. Phys., 3, 1 (1957).
52. Schmidt G. Phys. Fluids, 5, 994 (1962).
53. Seidl M. Plasma Physics (J.N.E.Pt.C), 6, 597 (1964).
54. Siambis J. Guiding Center Motion of Charged Particles in combined Mirror Multipole Cusp Magnetic Fields. Elec. Res. Lab. Tech. Rept. AFAL TR-65-7, Univ. of Calif. (1965).
55. Siambis J. G., Northrop T. G. Phys. Fluids, 6, 2001 (1966).
56. Синельников К. и др. «Ж. техн. физ.», 5, 236 (1960).
57. Синнис Дж., Шмидт Г. «Ж. техн. физ.» 6, 841 (1963).
58. Spitzer L. In: Proc. and Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, 32, 181 (1958).
59. Стих Т. Phys. Fluids, 7, 1960 (1964).
60. Стикс Т. Теория плазменных волн. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1965.
61. Stormer C. Arch. Sci. Phys. Nat., 24 (1907).

62. Stormer C. The Polar Aurora. Oxford, Clarendon Press, 1955.
63. Sturrock P. A. Phys. Rev., **141**, 186 (1966).
64. Sturrock P. A., Hall D. E. Diffusion Scattering and Acceleration of Particles by Stochastic Electromagnetic Fields. Stanford U. Inst. of Plasma Research Report No. 164 (1967).
65. Бишоп А. С. Проект Шервуд. Перев. с англ. Под ред. Л. А. Арцимовича. М., Атомиздат, 1960.
66. Tuma D. T., Lichtenberg A. J. Plasma Phys. (J.N.E.Pt.C), **9**, 87 (1967).
67. Wang M. C., Uhlenbeck G. E. Rev. Mod. Phys., **17**, 2295 (1945).
68. Wingerson R. C. Phys. Rev. Letters, **6**, 446 (1961).
69. Wingerson R. C., Dupree T. H., Rose D. J. Phys. Fluids, **7**, 1475 (1964).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Некоторые основы теории	8
§ 1.1. Введение	8
Движение частиц в фазовом пространстве. Гамильтонова форма уравнений движения. Законы сохранения в фазовом пространстве. Фазовые диаграммы для многомерных систем. Оптическая аналогия	
§ 1.2. Интегралы движения	21
Канонические преобразования. Интегральные инварианты. Переменные угол — действие. Эквивалентность классической механики и геометрической оптики	
§ 1.3. Сохранение фазового объема	34
Введение. Теорема Лувилля	
Сведение $6n$ -мерного фазового пространства к пространству шести измерений для систем не взаимодействующих частиц. Теорема Лиувилля для 6 -мерного фазового пространства с учетом взаимодействия между частицами	
§ 1.4. Теория колебаний	44
Введение. Консервативные автономные системы. Линейная неавтономная система. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Решение автономных уравнений со слабой нелинейностью методом возмущений. Асимптотическое разложение. Метод усреднения	
Глава 2. Адиабатические инварианты	56
§ 2.1. Адиабатическая инвариантность	56
Введение. Адиабатическая инвариантность интеграла действия	
§ 2.2. Изменение интеграла действия для почти адиабатических систем	
Введение. Метод асимптотического разложения. Метод прямого вычисления	
§ 2.3. О минимизации увеличения эффективного фазового пространства	73
§ 2.4. Адиабатические инварианты для систем с более чем одной степенью свободы.	76
Использование адиабатических инвариантов. Описание метода. Адиабатическое разделение переменных. Применение асимптотического метода к гармоническому осциллятору. Амплитудные функции и точные инварианты. Пределы применимости адиабатической теории	
Глава 3. Преобразование фазового пространства	91
§ 3.1. Основные понятия	91
Введение. Скачкообразное изменение параметров. Распределение плотности в фазовом пространстве	

§ 3.2. Линейные преобразования	98
Введение. Метод эллипсов. Колебания частиц в кусочно-постоянной системе. Согласование в фазовом пространстве	
§ 3.3. Поперечные фазовые преобразования пучков.	109
Введение. Выбор переменных. Линейные линзы. Изображения и профили пучков в системах с линейными линзами. Устойчивость, фазовое пространство и огибающая периодически фокусируемого пучка. Нелинейные линзы — оптическая аналогия	
§ 3.4. Преобразование продольного фазового пространства. Нелинейные эффекты	123
Введение. Фазовая группировка. Группировка по энергии	
§ 3.5. Распределение фазовой плотности внутри пучка	131
Введение. Предельная плотность тока. Учет тепловых скоростей. Влияние пространственного заряда	
§ 3.6. Связь между степенями свободы.	138
Типы связей. Фазовый анализ сепаратора частиц по скоростям	
Г л а в а 4. Динамика частиц в ускорителях	147
§ 4.1. Бетатронные колебания	147
Общее описание колебаний в ускорителях. Свободные колебания в аксиально-симметричных циклических ускорителях. Свободные колебания в синхротронах со знакопеременными градиентами. Бетатронные колебания при наличии вынуждающей силы	
§ 4.2. Синхротронные и связанные колебания; эффекты излучения и пространственного заряда.	161
Введение. Синхротронные колебания в линейных ускорителях. Синхротронные колебания в синхротронах. Связанные колебания. Затухание амплитуды колебаний, обусловленное радиационными потерями. Гамильтонов формализм с учетом пространственного заряда	
§ 4.3. Поперечное согласование в ускорителях	179
Введение. Поперечная фокусировка в линейных ускорителях	
§ 4.4. Продольное согласование	
Введение. Анализ группирующей секции линейного ускорителя	
§ 4.5. Использование распределений плотности в процедуре увеличения числа транспортируемых частиц	192
Введение. Аналитическое рассмотрение двух предельных случаев. Численное определение оптимального напряжения	
§ 4.6. Многооборотная инжекция в магнитные кольца	200
Общие соображения. Заполнение фазового пространства в азимутально-симметричных ускорителях. Многооборотная инжекция в магнитное кольцо с переменными градиентами. Многооборотная инжекция, использующая радиационное затухание. Накопление пучка в ускорителях с постоянным магнитным полем и переменными градиентами	
Г л а в а 5. Приложение к плазме	212
§ 5.1. Основные положения	212
Адиабатические инварианты движения. Движение ведущего центра. Эквивалентность вращательного движения гармоническому осциллятору. Инварианты более высоких порядков. Некоторые общие замечания о неадиабатическом поведении. Неадиабатическое изменение поля. Динамика плазмы Власова	
§ 5.2. Удержание частицы в поле диполя	230
Введение. Постановка задачи. Метод интегралов действия. Обобщенные координаты и равновесное состояние	

§ 5.3. Лабораторная плазма. Методы удержания плазмы	240
Введение. Симметричные полоидальные поля. Приближенное определение движения частиц в ловушке с магнитными пробками. Движение в удерживающих полях без азимутальной симметрии. Численные оценки пределов адиабатического поведения	
§ 5.4. Нагрев плазмы.	260
Введение. Адиабатическое сжатие. Циклотронный резонансный нагрев в однородном магнитном поле. Циклотронное резонансное взаимодействие в ловушках с магнитными пробками. Результаты теории возмущений. Численный расчет циклотронного взаимодействия в ловушках с магнитными пробками. Границы адиабатического поведения. Стохастический циклотронный резонансный нагрев	
§ 5.5. Инжекция частиц в удерживающие поля	277
Общее рассмотрение. Инжекция с помощью неадиабатических полей. Оценка периода захвата с помощью фазовых представлений	
Дополнение	287
Принятые обозначения	291
Л и т е р а т у р а	294

А. Лихтенберг

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Редактор *Степеннова О. А.*

Художественный редактор *Александров А. С.*

Переплет художника *Прокофьева В. М.*

Техн. редактор *Власова Н. А.* Корректор *Смирнова Н. А.*

Сдано в набор 17/IV 1972 г. Подписано к печ. 17/IX 1972 г.

Формат 60×90/16. Бумага типографская № 2

Усл. печ. л. 19,0.

Уч.-изд. 19,06 л.

Тираж 1800 экз. Цена 2 р. 12 к. Зак. изд. 69164. Зак. тип. 968

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская тип. № 4 Главполиграфпрома Государственного
Комитета Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли

Б. Переяславская, 46